

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a X-a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

10.1. Demonstrați că numerele $a = \log_{12} 24$ și $b = \log_6 18$ verifică relația $3a + 2b = ab + 5$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $\log_{12} 2 = a - 1$.	1 punct
2.	Se obține $\log_2 3 + 2 = \frac{1}{a - 1}$.	1 punct
3.	Se obține $\log_2 3 = \frac{3 - 2a}{a - 1}$ sau $\log_3 2 = \frac{a - 1}{3 - 2a}$.	1 punct
4.	Se obține $b = 1 + \log_6 3$.	1 punct
5.	Se obține $b = 1 + \frac{1}{1 + \log_3 2}$.	1 punct
6.	Se obține $b = \frac{5 - 3a}{2 - a}$.	1 punct
7.	Se obține $3a + 2b = ab + 5$.	1 punct
Punctaj total		7 puncte

10.2. Arătați că numărul $a = \frac{1}{\sqrt{1,5 - \sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}}$ este un număr natural.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $\frac{1}{\sqrt{1,5 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$.	1 punct
2.	Se obține $\frac{1}{\sqrt{1,5 - \sqrt{2}}} = 2 + \sqrt{2}$.	1 punct
3.	Se obține $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}}\right)^2}$.	1 punct
4.	Se obține $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{5} + 1}}$.	1 punct
5.	Se obține $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5 - 4}}{\sqrt{5} + 1}}$.	1 punct
6.	Se obține $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} = \sqrt{2}$.	1 punct
7.	Se obține $a = 2 \in \mathbf{N}$.	1 punct
Punctaj total		7 puncte

10.3. Rezolvați în numere reale ecuația

$$\frac{9x^2 - 2x}{\sqrt{3x-2}} - \frac{3x^2}{2} = 5x.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $DVA = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.	1 punct
2.	În DVA , se obține ecuația echivalentă $(3x+10)\sqrt{3x-2} - 18x + 4 = 0$.	1 punct
3.	Se obține $(3x-2)\sqrt{3x-2} - 3 \cdot (3x-2) \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{3x-2} \cdot 4 - 8 = 0$.	1 punct
4.	Se obține $(\sqrt{3x-2} - 2)^3 = 0$.	1 punct
5.	Se obține $\sqrt{3x-2} = 2$.	1 punct
6.	Se obține $3x - 2 = 4$.	1 punct
7.	Se obține $x = 2 \in DVA$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Pentru ghicirea soluției $x=2$, se ocordă un punct.**10.4.** Un punct arbitrar de pe cercul circumscris al unui triunghi echilateral este unit cu vârfurile triunghiului prin coarde. Demonstrați că una dintre aceste coarde este egală cu suma celorlalte două coarde.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se fixează punctul arbitrar M pe unul din cele trei arcuri mici ale cercului circumscris triunghiului, delimitate de vârfurile triunghiului, și menționează că în cazul coincidenței punctului M cu un vârf al triunghiului, afirmația din enunț este adevărată.	1 punct
2.	În contextul desenului din soluția propusă, se construiește $AD \parallel MC$ și se menționează că $AMCD$ este un trapez isoscel.	1 punct
3.	Se obține $AM = DC$ și $MC = BD$.	1 punct
4.	Se obține $m(\angle MAP) = 60^\circ = m(\angle DBP)$.	1 punct
5.	Se obține că triunghiurile AMP și BDP sunt echilaterale.	1 punct
6.	Se obține $MB = MA + MC$.	1 punct
7.	Se menționează, că în mod analog se demonstrează afirmația din enunț când punctul M aparține celorlalte două arcuri BC și AB .	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.5. Determinați toate valorile reale ale lui a pentru care polinomul $P(X) = (2a+2)X^2 - (8a-4)X - (3a-4)$ are două rădăcini reale distincte, ambele mai mici decât 1.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se definește $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (2a+2)x^2 - (8a-4)x - (3a-4)$ și se menționează că funcția f trebuie să fie de gradul doi și să aibă două zerouri distincte, ambele mai mici decât 1.	1 punct
2.	Se obține $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2}{11}\right) \cup (1; +\infty)$.	1 punct
3.	Se obține $(2a+2) \cdot f(1) > 0 \Leftrightarrow a \in \left(-1; \frac{10}{9}\right)$.	2 puncte
4.	Se obține $x_v < 1 \Leftrightarrow a \in (-1; 2)$.	2 puncte
5.	Se obține $a \in \left(-1; -\frac{2}{11}\right) \cup \left(1; \frac{10}{9}\right)$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte