OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a X–a
SOLUȚII

10.1. Demonstrați că numerele $a=\log_{12}24$ și $b=\log_6 18$ verifică relația $3a+2b=ab+5$.

Soluție. Avem

$$a=\log_{12}24 \Leftrightarrow \log_{12}(2\cdot 12)=a \Leftrightarrow \log_{12}2+\log_{12}12=a \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 12}=a-1 \Leftrightarrow \log_2(3\cdot 4)=\frac{1}{a-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3+2=\frac{1}{a-1}.$$

De aici avem $\log_2 3=\frac{3-2a}{a-1}$ sau $\log_3 2=\frac{a-1}{3-2a}$.

Atunci

$$b=\log_6 18=\log_6(6\cdot 3)=\log_6 6+\log_6 3=1+\frac{1}{\log_3 6}=1+\frac{1}{\log_3 3+\log_3 2}=1+\frac{1}{1+\frac{a-1}{3-2a}}=$$

$$=1+\frac{3-2a}{2-a}=\frac{5-3a}{2-a}.$$

Deci $b=\frac{5-3a}{2-a} \Rightarrow 2b-ab=5-3a \Leftrightarrow 3a+2b=ab+5$, ceea ce trebuia de demonstrat.

10.2. Arătați că numărul $a=\frac{1}{\sqrt{1,5-\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ este un număr natural.

Soluție. Determinăm primul termen al lui a

$$\frac{1}{\sqrt{1,5-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left|\sqrt{2}-1\right|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=2+\sqrt{2}.$$

Acum determinăm termenul al doilea al lui a

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}}{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}.$$

Deci $a=2+\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\in\mathbf{N}$.

10.3. Rezolvați în numere reale ecuația

$$\frac{9x^2-2x}{\sqrt{3x-2}}-\frac{3x^2}{2}=5x\,.$$

Soluție. Avem $DVA=\left(\frac{2}{3};\,+\infty\right)$. În *DVA*, ecuația din enunț este echivalentă cu următoarele:

$$2(9x-2)-3x\sqrt{3x-2}=10\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow(3x+10)\sqrt{3x-2}-18x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3x-2)\sqrt{3x-2}+12\sqrt{3x-2}-18x+4=0\Leftrightarrow(3x-2)\sqrt{3x-2}-3\cdot(3x-2)\cdot2+3\cdot\sqrt{3x-2}\cdot4-8=0\Leftrightarrow$$

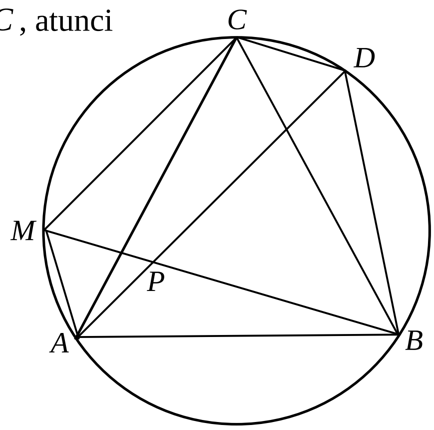
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x-2}-2\right)^3=0\Leftrightarrow\sqrt{3x-2}=2\Leftrightarrow3x-2=4\Leftrightarrow x=2\in DVA\,.$$

Răspuns: $S=\{2\}$.

10.4. Un punct arbitrar de pe cercul circumscris al unui triunghi echilateral este unit cu vârfurile triunghiului prin coarde. Demonstrați că una dintre aceste coarde este egală cu suma celorlalte două coarde.

Soluție. Presupunem că punctul M aparține cercului circumscris $\triangle ABC$.

Evident, dacă punctul M coincide cu unul dintre vârfurile $\triangle ABC$, atunci afirmația din enunț este adevărată.



Fie $M\in AC$ (arcul mic) și $AD\parallel MC$, D aparține cercului.

Vom arăta că $MB=MA+MC$. În continuare se vor utiliza doar arcurile mici corespunzătoare unei coarde.

Trapezul $AMCD$ este isoscel, deci $AM=DC$, și respectiv $m(AM)=m(DC)$. Însă $m(AC)=m(BC)$, prin urmare $m(MC)=m(BD)$, și respectiv $MC=BD$. Mai mult, $m(MD)=m(AC)=120^\circ$, de unde $m(\angle MAD)=m(\angle DBM)=\frac{1}{2}m(MD)=60^\circ$,

adică $m(\angle MAP)=60^\circ=m(\angle DBP)$. Însă $m(\angle AMP)=m(\angle AMB)=\frac{1}{2}m(AB)=60^\circ$ și $m(\angle BDP)=m(\angle BDA)=\frac{1}{2}m(AB)=60^\circ$, prin urmare triunghiurile *AMP* și *BDP* sunt echilaterale.

Deci $MB=MP+BP=MA+BD=MA+MC$.

În mod analog, se demonstrează afirmația din enunț când punctul M aparține arcurilor *BC* și *AB*.

10.5. Determinați toate valorile reale ale lui a pentru care polinomul $P(X)=(2a+2)X^2-(8a-4)X-(3a-4)$ are două rădăcini reale distincte, ambele mai mici decât 1.

Soluție. Considerăm funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(2a+2)x^2-(8a-4)x-(3a-4)$. Conform enunțului, funcția f trebuie să fie de gradul doi și să aibă două zerouri distincte, ambele mai mici decât 1. Pentru aceasta este necesar și suficient ca să fie îndeplinite următoarele trei condiții:

1. discriminantul $\Delta>0$;
2. coeficientul $2a+2$ are același semn ca și $f(1)$, adică $(2a+2)\cdot f(1)>0$;
3. pentru abscisa vârfului parabolei (graficului funcției f) $x_V<1$.

1. $\Delta>0\Leftrightarrow(8a-4)^2+4(2a+2)(3a-4)>0\Leftrightarrow 8\left(8a^2-8a+2+3a^2+3a-4a-4\right)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11a^2-9a-2>0\Leftrightarrow(11a+2)(a-1)>0\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\,-\frac{2}{11}\right)\cup(1;\,+\infty)$.

2. $(2a+2)\cdot f(1)>0\Leftrightarrow(2a+2)(-9a+10)>0\Leftrightarrow(a+1)(9a-10)<0\Leftrightarrow a\in\left(-1;\,\frac{10}{9}\right)$.

3. $x_V<1\Leftrightarrow\frac{8a-4}{2(2a+2)}<1\Leftrightarrow\frac{2a-1}{a+1}-1<0\Leftrightarrow\frac{a-2}{a+1}<0\Leftrightarrow(a+1)(a-2)<0\Leftrightarrow a\in(-1;\,2)$.

Deci,

$$\begin{cases} a\in\left(-\infty;\,-\frac{2}{11}\right)\cup(1;\,+\infty) \\ a\in\left(-1;\,\frac{10}{9}\right) \\ a\in(-1;\,2) \end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(-1;\,-\frac{2}{11}\right)\cup\left(1;\,\frac{10}{9}\right).$$

Răspuns: $a\in\left(-1;\,-\frac{2}{11}\right)\cup\left(1;\,\frac{10}{9}\right)$.