OLIMPIADA LA MATEMATICĂ

Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, clasa a XI–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Orice rezolvare corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

11.1. Pentru care valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 26$, este o funcţie strict monotonă pe $\mathbb{R}$?

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată că funcţia dată f este monotonă $\iff$ $f'(x) \geq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$. • Menţionează că f este monotonă $\iff$ $f'(x) \geq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$ (1) sau $f'(x) \leq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$. (2) .... 1p • Arată cazul (2) este imposibil. 1p	2 puncte
2.	Arată cazul (1) $\iff$ $a \in [-3, 6]$. • Menţionează că (1) $\iff$ $\Delta \leq 0$. .... 1p • Arată că $\Delta \leq 0$ $\iff$ $a \in [-3, 6]$. 1p	2 puncte
3.	Arată că (1) este suficientă ca f să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$. • Din presupunerea $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < x_2$, deduce $f(x) \equiv f(x_1)$ pentru $x \in (x_1, x_2)$. .... 1p • Deduce $f'(x) \equiv 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$. .... 1p • Menţionează contradicţia cu faptul că f' poate avea cel mult două zerouri şi deduce că f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$. 1p	3 puncte
	Punctaj total	7 puncte

11.2. Determinaţi toate valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + a^2 + a & \text{pentru } x < 0, \\ 2 & \text{pentru } x = 0, \\ \sin x + 2\cos x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

este derivabilă în $x = 0$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Menţionează că f este derivabilă în $x = 0 \iff$ există şi sunt egale derivatele laterale finite în $x = 0$, $f'_s(0) = f'_d(0)$.	1 punct
2.	Calculează corect derivatele laterale $f'_s(0)$ şi $f'_d(0)$.	1 punct
3.	Arată că $f'_d(0) = 1$.	2 puncte
4.	Deduce că $a^2 + a - 2 = 0$ şi $a^2 = 1$.	2 puncte
5.	Obţine $a = 1$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Notă. Se acordă cel mult 2 puncte dacă se studiază doar condiţia $\lim_{x\to-0} f'(x) = \lim_{x\to+0} f'(x)$ (aceasta nu asigură nici măcar continuitatea funcţiei f în $x = 0$).

11.3. Fie x, y numere reale astfel încât $x, y \geq 0$ şi $x + y \leq 1$. Demonstraţi că

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2} \leq 2.$$

Când are loc egalitatea?

Rezolvare cu barem de evaluare - *Soluţia 1.*		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Reduce la inegalitatea $\sqrt{1+x-y} + \sqrt{1+y-x} \leq 2$ (sau una echivalentă). • Menţionează că $a^2 \leq a$ pentru $a \in [0, 1]$. 1p	2 puncte
2.	Demonstrează o inegalitate de forma $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \leq 2$ pentru $\vert t \vert \leq 1$. • Menţionează inegalitatea $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. 1p	3 puncte
3.	Obţine corect cazul de egalitate $x = y = 0$.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Rezolvare cu barem de evaluare - *Soluţia 2.*		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Reduce inegalitatea cerută la condiţia $BM + CM \leq 2$ în triunghiul ABC. • Consideră triunghiul ABC şi arată că coordonatele punctului $M(x, y)$ verifică condiţiile din ipoteză, dacă şi numai dacă M se află în interiorul triunghiului ABC sau pe laturile lui. 1p	2 puncte
2.	Arată că $BM + CM \leq AB + AC = 2$. • Arată că $BM + CM \leq BL + LC$. 1p	3 puncte
3.	Obţine corect cazul de egalitate $x = y = 0$.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

11.4. Fie M un punct din interiorul triunghiului echilateral ABC, astfel încât $\measuredangle BMC = 120°$. Demonstraţi că $MA^2 + 2MB \cdot MC = AB^2$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Din $\triangle BMC$ obţine $AB^2 = MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC$. • Aplică teorema cosinusului într-un triunghi cu un unghi de $60°$ sau $120°$. 1p	2 puncte
2.	Obţine relaţia $AM^2 = MB^2 + MC^2 - MB \cdot MC$. • Consideră punctele M_1, C_1 (adică rotaţia de $60°$ în jurul lui A). ....1p • Arată că AM, BM, CM formează un triunghi cu un unghi de $60°$. ....2p • Aplică teorema cosinusului în triunghiul format de AM, BM, CM. 1p	4 puncte
3.	Din 1. şi 2. obţine concluzia.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

11.5. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1).$$

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Menţionează că funcţia $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.	1 punct
2.	Demonstrează că dacă x este o soluţie a ecuaţiei, atunci $f(f(x)) = x$.	2 puncte
3.	Demonstrează că dacă x este o soluţie atunci $f(x) = x$.	2 puncte
4.	Rezolvă ecuaţia $2^x + 1 = 3^x$ şi obţine soluţia unică $x = 1$. Prin verificare confirmă că $x = 1$ este soluţie şi a ecuaţiei iniţiale.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte