ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

районный/муниципальный тур, 7 февраля 2026 г., XI класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

11.1. Для каких значений параметра $a \in \mathbb{R}$ функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 26$, является строго монотонной функцией на $\mathbb{R}$?

<table>
<tr><td colspan="3">Решение со схемой распределения баллов</td></tr>
<tr><td>Шаг</td><td>Этапы решения</td><td>Количество баллов</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Показывает, что данная функция f монотонна $\iff f'(x) \geq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$.
• Отмечает, что f монотонна $\iff f'(x) \geq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$ (1) или $f'(x) \leq 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$. (2) .... 1 б
• Показывает, что случай (2) невозможен. .... 1 б</td><td>2 балла</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Показывает, что случай (1) $\iff a \in [-3, 6]$.
• Отмечает, что (1) $\iff \Delta \leq 0$. .... 1 б
• Показывает, что $\Delta \leq 0 \iff a \in [-3, 6]$. .... 1 б</td><td>2 балла</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Показывает, что (1) достаточно для того, чтобы f была строго монотонной на $\mathbb{R}$.
• Из предположения $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < x_2$, выводит, что $f(x) \equiv f(x_1)$ для $x \in (x_1, x_2)$. .... 1 б
• Выводит, что $f'(x) \equiv 0$ для $x \in (x_1, x_2)$. .... 1 б
• Отмечает противоречие с тем фактом, что f' может иметь не более двух нулей и выводит, что f строго монотонна на $\mathbb{R}$. .... 1 б</td><td>3 балла</td></tr>
<tr><td></td><td>Общее количество баллов</td><td>7 баллов</td></tr>
</table>

11.2. Найдите все значения параметра $a \in \mathbb{R}$, для которых функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x + a^2 + a & \text{для } x < 0, \\ 2 & \text{для } x = 0, \\ \sin x + 2\cos x & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

дифференцируема в $x = 0$.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Отмечает, что f дифференцируема в $x = 0 \iff$ существуют и равны конечные односторонние производные в $x = 0$, $f'_s(0) = f'_d(0)$.	1 балл
2.	Правильно вычисляет односторонние производные $f'_s(0)$ и $f'_d(0)$.	1 балл
3.	Показывает, что $f'_d(0) = 1$.	2 балла
4.	Получает $a^2 + a - 2 = 0$ и $a^2 = 1$.	2 балла
5.	Получает $a = 1$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Замечание. Присваивается не более 2 баллов, если рассматривается только условие $\lim_{x\to -0} f'(x) = \lim_{x\to +0} f'(x)$ (это не обеспечивает даже непрерывности функции f в $x = 0$).

11.3. Пусть x, y – вещественные числа такие, что $x, y \geq 0$ и $x + y \leq 1$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2} \leq 2.$$

Когда имеет место равенство?

Решение со схемой распределения баллов - *Решение 1*		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Приводит к неравенству $\sqrt{1+x-y} + \sqrt{1+y-x} \leq 2$ (или к некоторому эквивалентному). • Отмечает, что $a^2 \leq a$ для $a \in [0, 1]$. .... 1 б	2 балла
2.	Доказывает неравенство вида $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \leq 2$ для $\lvert t \rvert \leq 1$. • Отмечает неравенство $a + b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$. .... 1 б	3 балла
3.	Получает правильный случай равенства $x = y = 0$.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Решение со схемой распределения баллов - *Решение 2*		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Приводит требуемое неравенство к условию $BM + CM \leq 2$ в треугольнике ABC. • Рассматривает треугольник ABC и показывает, что координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют условиям задачи тогда и только тогда, когда M находится внутри треугольника ABC или на его сторонах. .... 1 б	2 балла
2.	Показывает, что $BM + CM \leq AB + AC = 2$. • Показывает, что $BM + CM \leq BL + LC$. .... 1 б	3 балла
3.	Получает правильный случай равенства $x = y = 0$.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

11.4. Точка M находится внутри равностороннего треугольника ABC так, что $\measuredangle BMC = 120°$. Докажите, что $MA^2 + 2MB \cdot MC = AB^2$.

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Из $\triangle BMC$ получает $AB^2 = MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC$. • Применяет теорему косинуса для треугольника с углом $60°$ или $120°$. 1 б	2 балла
2.	Получает соотношение $AM^2 = MB^2 + MC^2 - MB \cdot MC$. • Рассматривает точки M_1, C_1 (т.е. поворот на $60°$ вокруг A). ..... 1 б • Показывает, что AM, BM, CM образуют треугольник с углом $60°$. .... 2 б • Применяет теорему косинуса к треугольнику, образованному AM, BM, CM. .... 1 б	4 балла
3.	Из 1. и 2. получает требуемый результат.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

11.5. Решите в $\mathbb{R}$ уравнение

$$\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1).$$

Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Отмечает, что функция $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ является строго возрастающей на $(0, +\infty)$.	1 балл
2.	Показывает, что если x является решением уравнения, то $f(f(x)) = x$.	2 балла
3.	Показывает, что если x является решением уравнения, то $f(x) = x$.	2 балла
4.	Решает уравнение $2^x + 1 = 3^x$ и получает единственное решение $x = 1$. Путём проверки подтверждает, что $x = 1$ является также решением исходного уравнения.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов