

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ

Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, clasa a XI-a

SOLUȚII

11.1. Pentru care valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 26$, este o funcție strict monotonă pe \mathbb{R} ?

Soluție. Se știe că pentru ca o funcție derivabilă f să fie monotonă pe \mathbb{R} este necesar și suficient ca $f'(x) \geq 0$ ($(\forall)x \in \mathbb{R}$), sau $f'(x) \leq 0$ ($(\forall)x \in \mathbb{R}$).

Astfel, pentru ca funcția dată f să fie monotonă este necesar și suficient ca

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6 \geq 0 \quad ((\forall)x \in \mathbb{R}), \quad (1)$$

sau

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6 \leq 0 \quad ((\forall)x \in \mathbb{R}). \quad (2)$$

Condiția (2) nu este posibilă, deoarece $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Condiția (1) se reduce la condiția pentru discriminant

$$\Delta = 4a^2 - 12(a+6) \leq 0 \iff a^2 - 3a - 18 \leq 0 \iff a \in [-3, 6].$$

În caz general, din condiția (1) rezultă că funcția f este monoton crescătoare, dar nu neapărat și strict monotonă. În cazul nostru condiția (1) este suficientă și pentru monotonia strictă.

Presupunem că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Din faptul că f este monoton crescătoare rezultă că pentru orice x cu $x_1 < x < x_2$, avem $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1)$ și, ca urmare, $f(x) = f(x_1)$, iar $f'(x) = 0$. Dar f' are cel mult două zerouri, contradicție.

Rezultă că pentru $a \in [-3, 6]$, și doar pentru aceste valori, funcția f este strict monotonă pe \mathbb{R} . \square

11.2. Determinați toate valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + a^2 + a & \text{pentru } x < 0, \\ 2 & \text{pentru } x = 0, \\ \sin x + 2 \cos x & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$$

este derivabilă în $x = 0$.

Soluție. Pentru ca funcția f să fie derivabilă în $x = 0$ este necesar și suficient ca funcția f să posedे derivatele finite la stânga și la dreapta în $x = 0$, adică $f'_s(0)$ și $f'_d(0)$, care să fie egale (de altfel, aceste condiții asigură și continuitatea funcției f în $x = 0$).

Menționăm că doar condiția $\lim_{x \rightarrow -0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$ nu este suficientă, ea nu asigură nici măcar continuitatea funcției f în $x = 0$.

Prin urmare,

$$f'_s(0) = f'_d(0) \iff \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \iff$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{a^2 x + a^2 + a - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x + 2 \cos x - 2}{x} \iff$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(a^2 + \frac{a^2 + a - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} \right) = 1.$$

Deoarece în ultima egalitate avem că limita din dreapta este egală cu 1, rezultă că și limita din stânga este egală cu 1, iar aceasta are loc, dacă și numai dacă

$$\begin{cases} a^2 + a - 2 = 0, \\ a^2 = 1, \end{cases} \iff a = 1.$$

Rezultă că avem un singur număr $a = 1$. □

11.3. Fie x, y numere reale astfel încât $x, y \geq 0$ și $x + y \leq 1$. Demonstrați că

$$\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2} \leq 2.$$

Când are loc egalitatea?

Soluția 1. Deoarece $a^2 \leq a$, pentru orice $a \in [0, 1]$ (cu egalitate pentru $a \in \{0, 1\}$), avem

$$\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2} \leq \sqrt{x + 1 - y} + \sqrt{y + 1 - x} = \sqrt{1 + t} + \sqrt{1 - t},$$

unde $t = |x - y| \in [0, 1]$. Folosind inegalitatea $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ (valabilă pentru orice $a, b > 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b$), avem

$$\sqrt{1 + t} + \sqrt{1 - t} \leq \sqrt{2(1 + t + 1 - t)} = 2, \text{ pentru orice } t \in [0, 1].$$

Pentru egalitate, trebuie să avem $1 + t = 1 - t$ și $x, y \in \{0, 1\}$, de unde rezultă $x = y = 0$ sau $x = y = 1$. Însă din enunț avem condiția $x + y \leq 1$, deci, egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = 0$.

Soluția 2. Considerăm în plan punctele $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ și $C(0, 1)$. Triunghiul ABC este un triunghi dreptunghic în A cu laturile $AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$.

Punctul $M(x, y)$ are coordonate care verifică condițiile $x, y \geq 0$ și $x + y \leq 1$, dacă și numai dacă M se află în interiorul triunghiului ABC sau pe laturile lui.

Calculăm $BM = \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$ și $CM = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2}$.

Prin urmare, inegalitatea cerută este echivalentă cu condiția $BM + CM \leq 2$.

Cazurile $M = B$ sau $M = C$ sunt banale, deoarece în aceste cazuri $BM + CM = BC = \sqrt{2} \leq 2$.

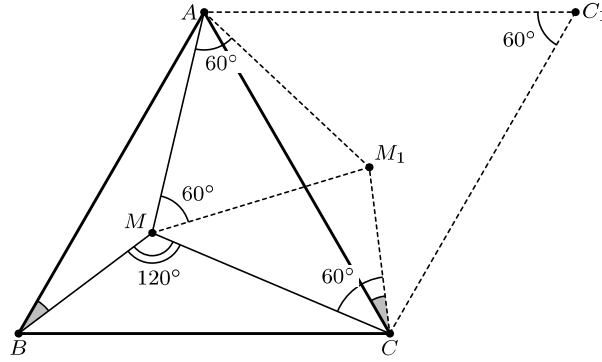
Pentru celelalte cazuri notăm cu L intersecția dreptei BM cu AC (poate fi chiar $L = M$ sau $L = A$).

Astfel, $BM + CM \leq BM + ML + LC \leq BL + LC \leq AB + AL + LC = AB + AC = 1 + 1 = 2$.

Egalitatea are loc, dacă și numai dacă punctul M coincide cu punctul A , adică $x = y = 0$. □

11.4. Fie M un punct din interiorul triunghiului echilateral ABC , astfel încât $\angle BMC = 120^\circ$.

Demonstrați că $MA^2 + 2MB \cdot MC = AB^2$.



Soluție. Considerăm rotația R de 60° în jurul lui A și notăm $R(M) = M_1$, $R(C) = C_1$ (vezi figura). Avem $R(B) = C$, triunghiul AMM_1 este echilateral, iar triunghiurile ABM și ACM_1 sunt congruente. Atunci $AM = MM_1$, $M_1C = MB$ și $\angle ACM_1 = \angle ABM = 60^\circ - \angle MBC$. Mai observăm că

$$\angle MCM_1 = \angle MCA + \angle ACM_1 = 60^\circ - \angle MCB + 60^\circ - \angle MBC = 120^\circ - (180^\circ - \angle BMC) = 60^\circ.$$

Aplicând teorema cosinusului în $\triangle MBC$ cu $\angle BMC = 120^\circ$, obținem

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cdot \cos 120^\circ = MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC. \quad (1)$$

Aplicând teorema cosinusului în $\triangle MM_1C$, obținem

$$MM_1^2 = MC^2 + M_1C^2 - 2MC \cdot M_1C \cdot \cos 60^\circ \implies AM^2 = MC^2 + MB^2 - MC \cdot MB. \quad (2)$$

Din (1) și (2) prin scădere obținem $MM_1^2 - BC^2 = -2MB \cdot MC \implies MA^2 + 2MB \cdot MC = AB^2$. \square

11.5. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația

$$\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1).$$

Soluție. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \log_3(2^x + 1)$, care este strict crescătoare pe \mathbb{R} .

Dacă $x = a$ este o soluție a ecuației date, atunci din ecuație rezultă că

$$f(f(a)) = \log_3(2^{\log_3(2^a + 1)} + 1) = \log_3(2^{\log_2(3^a - 1)} + 1) = \log_3(3^a - 1 + 1) = a,$$

adică $f(f(a)) = a$ (1).

Vom arăta că $f(a) = a$. Dacă $f(a) > a$, atunci cum f este strict crescătoare, $f(f(a)) > f(a) > a$, iar dacă $f(a) < a$, atunci similar obținem $f(f(a)) < f(a) < a$. În ambele cazuri obținem contradicție cu (1). Prin urmare, trebuie neapărat să avem $f(a) = a$, adică $\log_3(2^a + 1) = a$, pentru orice soluție $x = a$ a ecuației date. De aici rezultă $2^a + 1 = 3^a$. Rămâne să rezolvăm ecuația obținută: $2^x + 1 = 3^x$.

Observăm că $3^x = 2^x + 1 > 1$ implică $x > 0$. Scriem ultima egalitate sub forma $(\frac{2}{3})^x + (\frac{1}{3})^x = 1$. Deoarece $x = 1$ este o soluție, iar membrul stâng al ecuației este o funcție strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$, rezultă că $x = 1$ este singura soluție a acestei ecuații. Se verifică imediat că $x = 1$ satisface și ecuația din enunț. \square