OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 07 februarie 2026, Clasa a XII–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

12.1. Fie funcția $f:[1;4] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$. Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției f.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$A(\Gamma_f) = \int_1^4 \ln(1+\sqrt{x})dx$ $= \left\| \begin{matrix} u = \ln(1+\sqrt{x}) & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx & v = x \end{matrix} \right\| = x\ln(1+\sqrt{x})\Big\|_1^4 - \dfrac{1}{2}\int_1^4 \dfrac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$	2 puncte
2.	$\int_1^4 \dfrac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}} = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \right\| = 2\int_1^2 \dfrac{t^2}{1+t}dt =$	2 puncte
3.	$= 2\int_1^2 \left(t - 1 + \dfrac{1}{t+1}\right)dt$	1 punct
4	$= 2\left(\dfrac{t^2}{2} - t + \ln(t+1)\right)\Big\|_1^2$	1 punct
5.	Obținerea $A(\Gamma_f) = 3\ln 3 - \frac{1}{2}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.2. În piramida triunghiulară $VABC$ înălțimea VO trece prin punctul O -centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Se știe că $m(\angle VAC) = 60°$, $m(\angle VCA) = 45°$, iar ariile triunghiurilor AOB și ABC se raportă ca $1:(2+\sqrt{3})$. Determinați măsura unghiului BVC.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $AP = \frac{a}{\sqrt{3}}, AV = \frac{2a}{\sqrt{3}}, PC = a$, unde P, Q și R - punctele de tangență a cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile AC, AB și AC respectiv și $VP = a$.	1 punct
2.	$AQ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, RC = a, BQ = BR$	1 punct

3.	Exprimarea ariilor triunghiurilor ABC și AOC prin a și raza r a cercului înscris în triunghiul ABC.	2 puncte
4.	Obținerea $BQ = BR = \frac{a}{\sqrt{3}} = AQ$	1 punct
5.	Obținerea $m(\angle AVP) = m(\angle BVR) = 30°,\ m(\angle PCV) = m(\angle RCV) = 45°$ și $m(\angle BVC) = 75°$.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

12.3. Fie z_1, z_2 numere complexe nenule, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$. Calculați valoarea expresiei $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2026} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2026}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = 1$.	1 punct
2.	Obținerea $\mathrm{A} = 2\cos(2026\,\varphi)$, unde $\frac{z_1}{z_2} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$.	2 puncte
3.	Obținerea $\|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi\| = 1$	1 punct
4.	Obținerea $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ și determinarea lui φ.	2 puncte
5.	Calcularea valorii lui $A = -1$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.4. Determinați matricea A de ordinul 2 cu elemente reale, care verifică relația

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $B^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix}$, unde $B = A - 2I_2$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2 puncte
2.	Obținerea $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$	2 puncte
3.	Obținerea $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	2 puncte
4.	Obținerea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.5. Fie $$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+x^2}{1+x^4} \operatorname{arctg} x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$ Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+x^2}{1+x^4} \operatorname{arctg} x \, dx = \left\vert \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x = \frac{1}{n} \Rightarrow t = n \\ x = n \Rightarrow t = \frac{1}{n} \end{array} \right\vert = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}} arctg\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} \, dt$	2 puncte
2.	$arctg\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - arctgt, \qquad t > 0.$	1 punct
3.	Obținerea $I_n = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt$	1 punct
4.	Obținerea $I_n = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)'}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} arctg \frac{n-\frac{1}{n}}{\sqrt{2}}$	2 puncte
5	Obținerea $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte