ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 07 февраля 2026 г., XII-ый класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

12.1. Дана функция $f:[1;4]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$. Найдите числовое значение площади подграфика функции f.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$A(\Gamma_f)=\int_1^4 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ $=\begin{vmatrix} u=\ln(1+\sqrt{x}) & dv=dx \\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx & v=x \end{vmatrix}=x\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\Big\vert_1^4-\dfrac{1}{2}\int_1^4\dfrac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$	2 балла
2.	$\int_1^4\dfrac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{vmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \\ x=1\Rightarrow t=1 \\ x=4\Rightarrow t=2 \end{vmatrix}=2\int_1^2\dfrac{t^2}{1+t}dt=$	2 балла
3.	$=2\int_1^2\left(t-1+\dfrac{1}{t+1}\right)dt$	1 балл
4	$=2\left(\dfrac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Big\vert_1^2$	1 балл
5.	Получение $A(\Gamma_f)=3\ln 3-\frac{1}{2}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.2. В треугольной пирамиде $VABC$ высота VO проходит через точку O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $m(\angle VAC)=60°$, $m(\angle VCA)=45°$, а площади треугольников AOB и ABC относятся как $1:\left(2+\sqrt{3}\right)$. Найдите величину угла BVC.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $AP=\frac{a}{\sqrt{3}}, AV=\frac{2a}{\sqrt{3}}, PC=a$, где P, Q и R – точки касания со сторонами AC, AB и AC соответственно окружности, вписанной в треугольник	2 балла

	ABC, и $VP = a$.	
2.	$AQ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, RC = a, BQ = BR$	1 балл
3.	Выражение площади треугольников ABC и AOC через a и радиус r вписанной в треугольник ABC окружности.	2 балла
4.	Получение $BQ = BR = \frac{a}{\sqrt{3}} = AQ$	1 балл
5.	Получение $m(\angle AVP) = m(\angle BVR) = 30°$, $m(\angle PCV) = m(\angle RCV) = 45°$ и $m(\angle BVC) = 75°$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.3. Даны ненулевые комплексные числа z_1, z_2 такие, что $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Вычислите значение выражения $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2026} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2026}$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\left\|\frac{z_1}{z_2}\right\| = 1$.	1 балл
2.	Получение $\mathrm{A} = 2\cos(2026\,\varphi)$, где $\frac{z_1}{z_2} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$.	2 балла
3.	Получение $\|1 + \cos\varphi + i\sin\varphi\| = 1$.	1 балл
4.	Получение $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ и нахождение значения φ.	2 балла
5.	Вычисление значения $A = -1$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.4. Найдите матрицу A второго порядка с действительными элементами, такую, что

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix}.$$

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $B^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix}$, где $B = A - 2I_2$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	2 балла
2.	Получение $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$	2 балла

3.	Получение $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$	2 балла
4.	Получение $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.5. Пусть

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+x^2}{1+x^4}\operatorname{arctg}x\,dx,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+x^2}{1+x^4}\operatorname{arctg}x\,dx=\left\lvert\begin{matrix} t=\frac{1}{x}\\ x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\\ x=\frac{1}{n}\Rightarrow t=n\\ x=n\Rightarrow t=\frac{1}{n}\end{matrix}\right\rvert=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}arctg\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}\,dt$	2 балла
2.	$arctg\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}-arctgt,\qquad t>0.$	1 балл
3.	Получение $I_n=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt$	1 балл
4.	Получение $I_n=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)'}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}dt=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}arctg\,\frac{n-\frac{1}{n}}{\sqrt{2}}$	2 балла
5	Получение $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов