OLIMPIADA LA MATEMATICĂ

etapa raională/municipală, 07 februarie 2026, Clasa a XII – a

SOLUȚII

12.1. Fie funcția $f: [1; 4] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$. Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției f.

Soluție.

$$A(\Gamma_f) = \int_1^4 \ln(1 + \sqrt{x})dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(1 + \sqrt{x}) & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}dx & v = x \end{matrix} \right| = x\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)\Big|_1^4 - \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt{x}}.$$

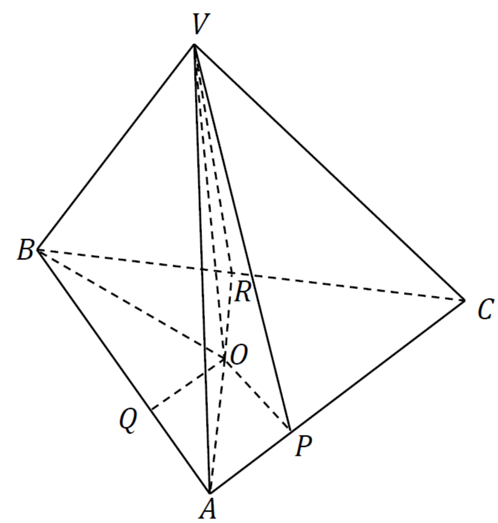
$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1 + \sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{matrix} \right| = 2\int_1^2 \frac{t^2}{1 + t}dt = 2\int_1^2 \frac{(t^2 - 1) + 1}{1 + t}dt = 2\int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t + 1}\right)dt$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln(t + 1)\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

Atunci $A(\Gamma_f) = x\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)\Big|_1^4 - \left(\ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2}\right) = 3\ln 3 - \frac{1}{2}$.

12.2. În piramida triunghiulară $VABC$ înălțimea VO trece prin punctul O - centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Se știe că $m(\angle VAC) = 60°$, $m(\angle VCA) = 45°$, iar ariile triunghiurilor AOB și ABC se raportă ca $1: \left(2 + \sqrt{3}\right)$. Determinați măsura unghiului BVC.

Soluție.



Fie P, Q și R punctele de tangență cu laturile AC, AB și AC respectiv, a cercului înscris în triunghiul ABC.
Fie $VP = a$. În condiția $m(\angle VAC) = 60°$, $m(\angle VCA) = 45°$ obținem $AP = \frac{a}{\sqrt{3}}, AV = \frac{2a}{\sqrt{3}}, PC = a$.
Astfel $AQ = \frac{a}{\sqrt{3}},\ RC = a,\ BQ = BR$.
Atunci $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = pr = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + a + BQ\right)r$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, p – semiperimetrul lui, iar $\mathcal{A}_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + BQ\right)r$.
Condiția

$$\frac{\mathcal{A}_{\Delta AOB}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + BQ\right)r}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + a + BQ\right)r} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

Implică $BQ = BR = \frac{a}{\sqrt{3}} = AQ$. Astfel am obținut că ΔAOB este isoscel. În consecință $AV = BV$, iar $\Delta VAP \equiv \Delta VBR$. Atunci $m(\angle AVP) = m(\angle BVR) = 30°$.
Întrucât $\Delta VPC \equiv \Delta VRC$, obținem $m(\angle PCV) = m(\angle RCV) = 45°$. Atunci $m(\angle BVC) = 75°$.

12.3. Fie z_1, z_2 numere complexe nenule, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Calculați valoarea expresiei $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2026} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2026}$.

Soluție. Întrucât $|z_1| = |z_2|$, obținem $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$. Notăm $\frac{z_1}{z_2} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \ \varphi \in (-\pi, \pi]$.

Atunci $A = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2026} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2026} = \cos(2026\,\varphi) + i\sin(2026\varphi) + \cos(-2026\,\varphi) + i\sin(-2026\varphi) = 2\cos(2026\,\varphi)$.

Condiția $|z_2| = |z_1 + z_2|$ implică $\left|1 + \frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \Leftrightarrow |1 + \cos\varphi + i\sin\varphi| = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Atunci $A = 2\cos(2026\,\varphi) = 2\cos\left(\frac{4052\pi}{3}\right) = 2\cos\left(1350\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1.$

12.4. Determinați matricea *A* de ordinul 2 cu elemente reale, care verifică relația

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix}.$$

Soluție. Condiția $A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix}$ poate fi scrisă astfel

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A - 8I_2 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - 2I_2)^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix},$$

unde $B = A - 2I_2,\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Atunci $B^4 = B \cdot B^3 = B^3 \cdot B$, de unde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases}.$$

Am obținut $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$. Atunci $B^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2c & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 81 & -27 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ c = 3 \end{cases}$.

$$B = A - 2I_2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarcă. Aceeași idee putea fi folosită în mod direct pentru a obține matricea *A*.

De exemplu, din ecuație rezultă

$$A \cdot \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} = A \cdot (A^3 - 6A^2 + 12\,A) = A^4 - 6A^3 + 12\,A^2 =$$

$$(A^3 - 6A^2 + 12\,A) \cdot A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Fie $A = \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix}$. Atunci

$$\begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ s & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0, \\ p = t. \end{cases}$$

Ca urmare,

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} t^3 - 6t^2 + 12t & 0 \\ 3st^2 - 12st + 12s & t^3 - 6t^2 + 12t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^3 - 6t^2 + 12t = -19 \\ 3st^2 - 12st + 12s = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)(t^2 - 7t + 19) = 0 \\ s(t^2 - 4t + 4) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ s = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

12.5. Fie

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \operatorname{arctg} x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculați $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Soluție.

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{1}{x} \\ x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{1}{t^2} dt \\ x = \dfrac{1}{n} \Rightarrow t = n \\ x = n \Rightarrow t = \dfrac{1}{n} \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^4}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt - \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + t^2}{1 + t^4} \operatorname{arctg} t \, dt = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt - I_n.$$

Atunci

$$I_n = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} dt = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}} \Bigg|_{\frac{1}{n}}^{n} =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{n - \frac{1}{n}}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n} - n}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{n - \frac{1}{n}}{\sqrt{2}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$, obținem $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{n - \frac{1}{n}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$.