

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a VIII-a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

8.1. Rezolvați în numere întregi ecuația: $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține echivalența $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y + 1)^2 = 2$.	1 punct
2.	Deduce inegalitățile: $0 \leq 2x^2 \leq 2$ și $0 \leq (y + 1)^2 \leq 1$.	1 punct
3.	Obține $x \in \{0, 1, -1\}$ și $y \in \{-1, 0, -2\}$.	1 punct
4.	Pentru $x = 0$ obține $y = \pm\sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Z}$.	1 punct
5.	Pentru $x = 1$ obține $y = -1$, deci $(x, y) = (1, -1)$.	1 punct
6.	Pentru $x = -1$ obține $y = -1$, deci $(x, y) = (-1, -1)$.	1 punct
7.	Pentru răspunsul corect: soluțiile ecuației sunt $(1, -1), (-1, -1)$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.2. O conductă de apă cu lungimea de 492 m se construiește din țevi de lungimi 14,7 m și 13,4 m fără a le tăia în bucăți mai mici. Determinați câte țevi de fiecare lungime sunt necesare pentru a construi conducta.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Notează cu p numărul de țevi de lungimea 14,7 m. și cu q numărul de țevi de lungimea 13,4 m. necesare pentru construirea conductei, $p, q \in \mathbb{N}$. Obține egalitatea $147 \cdot p + 134 \cdot q = 4920$.	1 punct
2.	Deduce că $p \neq 0$ și $q \neq 0$ și $q = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*$.	1 punct
3.	Obține $p = \frac{1640 - 134 \cdot k}{49}, p \in \mathbb{N}^*$.	1 punct
4.	Obține $0 < k \leq 12, k \in \mathbb{N}$.	1 punct
5.	Obține $p = 33 - 2k + \frac{23 - 36 \cdot k}{49}$.	1 punct
6.	Obține $p = (34 - 3k + \frac{13(k-2)}{49}) \in \mathbb{N}^*$	1 punct
7.	Obține unica valoare $k = 2$ și unica soluție $p = 28, q = 6$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.3. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este intersecția diagonalelor. Pe dreapta AD în exteriorul segmentului $[AD]$ se ia punctul E astfel încât $DE = \frac{1}{2}AD$. Fie $G \in AC$ astfel încât $EO \parallel BG$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului BCD .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Deduce că $[OC]$ este mediană în $\triangle BCD$.	1 punct
2.	Notează $EO \cap [DC] = \{M\}$, $BG \cap [DC] = \{N\}$, $EO \cap [AB] = \{F\}$ și demonstrează că $MN = FB$.	1 punct
3.	Demonstrează congruența $\triangle ODM \cong \triangle ONB$ și deduce $DM = BN$.	1 punct
4.	Trasează $[DK] \parallel EO$ cu $K \in [AB]$. Deduce $DM = KF$.	1 punct
5.	Aplică Teorema lui Thales în $\triangle AEF$, obține $\frac{AK}{KF} = \frac{AD}{DE} = \frac{2}{1} = 2$ și $AK = 2KF$.	1 punct
6.	Obține $AK = KB = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$.	1 punct
7.	Deduce că $DN = \frac{DC}{2}$ și că $[BN]$ este mediană în $\triangle BCD$. Concluzionează că G este centrul de greutate al triunghiului BCD , fiind punct de intersecție a două mediane.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.4. Determinați toate numerele naturale n , astfel încât mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{4-x} \geq n\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x-1)(4-x) \geq 0\}$$

au exact un element comun.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Remarcă că inegalitatea $(2x-1)(4-x) \geq 0$ este adevărată doar în cazurile: 1) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases}$ și 2) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x \leq 0. \end{cases}$	1 punct
2.	Rezolvă cazul 1) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases}$ și obține $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.	1 punct
3.	Rezolvă cazul 2) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x \leq 0. \end{cases}$ și obține $x \in \emptyset$. Obține $B = \{1, 2, 3, 4\}$.	1 punct
4.	Obține că $1 \in A$ doar pentru $n = 0$.	1 punct
5.	Obține că $2 \in A$ doar pentru $n \in \{0, 1\}$.	1 punct
6.	Obține că $3 \in A$ doar pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.	1 punct
7.	Deduce că $4 \notin A$, deoarece DVA al expresiei $\frac{2x-1}{4-x}$ este $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Scrie răspunsul problemei: $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

8.5. Fie a, b și c trei numere reale. Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele $(a - b)^2, (a - c)^2, (b - c)^2$ nu depășește $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Demonstrează că afirmația este adevărată în cazul, când cel puțin unul dintre numerele $a - b, a - c, b - c$ este egal cu zero. Analizează un caz.	1 punct
2.	Cercetează cazul $a - b \neq 0, a - c \neq 0, b - c \neq 0$. Notează cu m cel mai mic dintre numerele $ a - b , a - c , b - c $. Fără a restrânge generalitatea, consideră $a < b < c$. Obține $ a - b = b - a \geq m$ și $ b - c = c - b \geq m$.	1 punct
3.	Obține $ a - c = c - a = (c - b) + (b - a) \geq 2m$, și $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq m^2 + 4m^2 + m^2 = 6m^2$.	1 punct
4.	Obține $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac)$.	1 punct
5.	Obține $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$.	1 punct
6.	Deduce $6m^2 \leq (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$	1 punct
7.	Obține $m^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Concluzionează că cel mai mic dintre numerele $(a - b)^2, (a - c)^2, (b - c)^2$ nu depășește $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte