

**ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**Районный/муниципальный тур, 7 февраля 2026 г., VIII класс**  
**СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА**

**Примечание. Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.**

<b>8.1.</b> Решите в целых числах уравнение: $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ .		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получает эквивалентность $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y + 1)^2 = 2$ .	1 балл
2.	Выводит неравенства: $0 \leq 2x^2 \leq 2$ и $0 \leq (y + 1)^2 \leq 1$ .	1 балл
3.	Получает $x \in \{0, 1, -1\}$ и $y \in \{-1, 0, -2\}$ .	1 балл
4.	При $x = 0$ получает $y = \pm\sqrt{2} - 1 \notin Z$ .	1 балл
5.	При $x = 1$ получает $y = -1$ , следовательно, $(x, y) = (1, -1)$ .	1 балл
6.	При $x = -1$ получает $y = -1$ , следовательно, $(x, y) = (-1, -1)$ .	1 балл
7.	Пишет правильный ответ: решениями уравнения являются $(1, -1), (-1, -1)$ .	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

<b>8.2.</b> Водопровод длиной 492 м изготавливается из труб длиной 14,7 м и 13,4 м без их разрезания на меньшие части. Определите, сколько труб каждой длины необходимо использовать для изготовления водопровода.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Обозначает через $p$ количество труб длиной 14,7 м, а через $q$ — количество труб длиной 13,4 м, необходимых для строительства трубопровода, $p, q \in N$ . Получает равенство: $147 \cdot p + 134 \cdot q = 4920$ .	1 балл
2.	Выводит, что $p \neq 0$ и $q \neq 0$ и $q = 3 \cdot k, k \in N^*$ .	1 балл
3.	Получает $p = \frac{1640 - 134 \cdot k}{49}, p \in N^*$ .	1 балл
4.	Получает $0 < k \leq 12, k \in N$ .	1 балл
5.	Получает $p = 33 - 2k + \frac{23 - 36 \cdot k}{49}$ .	1 балл
6.	Получает $p = (34 - 3k + \frac{13(k-2)}{49}) \in N^*$	1 балл
7.	Получает единственное значение $k = 2$ и единственное решение $p = 28, q = 6$ .	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

**8.3.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $O$  является точкой пересечения диагоналей. На прямой  $AD$  вне отрезка  $[AD]$  возьмем точку  $E$  такую, что  $DE = \frac{1}{2}AD$ . Пусть  $G \in AC$  такое, что  $EO \parallel BG$ . Докажите, что  $G$  является центром тяжести треугольника  $BCD$ .

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выводит, что $[OC]$ является медианой в $\triangle BCD$ .	1 балл
2.	Обозначает $EO \cap [DC] = \{M\}$ , $BG \cap [DC] = \{N\}$ , $EO \cap [AB] = \{F\}$ и доказывает что $MN = FB$ .	1 балл
3.	Доказывает конгруэнтность $\triangle ODM \cong \triangle ODN$ и выводит $FB = DM$ .	1 балл
4.	Проводит прямую $[DK] \parallel EO$ , где $K \in [AB]$ . Выводит $DM = KF$ .	1 балл
5.	Применяет теорему Фалеса в $\triangle AEF$ , получает $\frac{AK}{KF} = \frac{AD}{DE} = \frac{2}{1} = 2$ и $AK = 2KF$ .	1 балл
6.	Получает $AK = KB = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$ .	1 балл
7.	Выводит, что $DN = \frac{DC}{2}$ и что $[BN]$ является медианой в $\triangle BCD$ . Заключает, что $G$ является центром тяжести треугольника $BCD$ , являясь точкой пересечения двух медиан.	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

**8.4.** Определите все натуральные числа  $n$  такие, что множества,

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{4-x} \geq n\} \text{ и } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x-1)(4-x) \geq 0\}$$

имеют ровно один общий элемент.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Отмечает, что неравенство $(2x-1)(4-x) \geq 0$ верно только в следующих случаях: 1) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x > 0. \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x < 0. \end{cases}$	1 балл
2.	Решает случай 1) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases}$ и получает $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ .	1 балл
3.	Решает случай 2) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x \leq 0. \end{cases}$ и получает $x \in \emptyset$ . получает $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .	1 балл
4.	Получает что $1 \in A$ только для $n = 0$ .	1 балл
5.	Получает что $2 \in A$ только для $n \in \{0, 1\}$ .	1 балл
6.	Получает что $3 \in A$ только для $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .	1 балл
7.	Выводит что $4 \notin A$ , поскольку ОДЗ выражения $\frac{2x-1}{4-x}$ равно $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ . Записывает решение задачи: $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ .	1 балл
Общее количество баллов		7 баллов

<p><b>8.5.</b> Пусть <math>a</math>, <math>b</math> и <math>c</math> – три действительные числа. Доказать, что по крайней мере одно из чисел <math>(a - b)^2</math>, <math>(a - c)^2</math>, <math>(b - c)^2</math> не превосходит <math>\frac{a^2+b^2+c^2}{2}</math>.</p>		
<p>Решение со схемой распределения баллов</p>		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказывает истинность утверждения в случае, когда хотя бы одно из чисел $a - b$ , $a - c$ , $b - c$ равно нулю. Анализирует один случай.	1 балл
2.	Рассматривает случай $a - b \neq 0$ , $a - c \neq 0$ , $b - c \neq 0$ . Обозначает через $m$ наименьшее из чисел $ a - b $ , $ a - c $ , $ b - c $ . Без потери общности рассматривает $a < b < c$ . Получает $ a - b  = b - a \geq m$ и $ b - c  = c - b \geq m$ .	1 балл
3.	Получает $ a - c  = c - a = (c - b) + (b - a) \geq 2m$ , и $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq m^2 + 4m^2 + m^2 = 6m^2$ .	1 балл
4.	Получает $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac)$ .	1 балл
5.	Получает $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$ .	1 балл
6.	Выводит $6m^2 \leq (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$	1 балл
7.	Получает $m^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ . Делает вывод, что наименьшее из чисел $(a - b)^2$ , $(a - c)^2$ , $(b - c)^2$ не превосходит $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ .	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов