

OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a VIII-a

SOLUȚII

8.1. Rezolvați în numere întregi ecuația: $2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$.

Soluție. Rescriem ecuația:

$$2x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + 2y + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y + 1)^2 = 2 \quad (1)$$

Cum $x, y \in \mathbb{Z}$, din această egalitate deducem inegalitățile: $0 \leq 2x^2 \leq 2$ și $0 \leq (y + 1)^2 \leq 1$.

De aici deducem $x \in \{0, 1, -1\}$ și $y + 1 \in \{0, 1, -1\} \Leftrightarrow y \in \{-1, 0, -2\}$.

Dacă $x = 0$, atunci din (1) obținem $(y + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2} - 1 \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $x = 1$, atunci din (1) obținem $(y + 1)^2 = 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$, deci $(x, y) = (1, -1)$.

Dacă $x = -1$, atunci din (1) obținem $(y + 1)^2 = 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$, deci $(x, y) = (-1, -1)$.

Astfel soluțiile ecuației sunt $(1, -1), (-1, -1)$.

8.2. O conductă de apă cu lungimea de 492 m se construiește din țevi de lungimi 14,7 m și 13,4 m fără a le tăia în bucăți mai mici. Determinați câte țevi de fiecare lungime sunt necesare pentru a construi conducta.

Soluție. Notăm cu p numărul de țevi de lungimea 14,7 m și cu q numărul de țevi de lungimea 13,4 m necesare pentru construirea conductei, $p, q \in \mathbb{N}$. Obținem egalitatea

$$14,7 \cdot p + 13,4 \cdot q = 492 \Leftrightarrow 147 \cdot p + 134 \cdot q = 4920.$$

Remarcăm că $p \neq 0$ și $q \neq 0$ deoarece $134 \nmid 4920$ și $147 \nmid 4920$. Deci $p, q \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$147 \cdot p + 134 \cdot q = 4920 \Leftrightarrow 3 \cdot 49 \cdot p + 134 \cdot q = 3 \cdot 1640 \Leftrightarrow 134 \cdot q = 3 \cdot 1640 - 3 \cdot 49 \cdot p = 3 \cdot (1640 - 49 \cdot p).$$

Cum $3 \nmid 134$, avem $q = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*$. Astfel obținem

$$134 \cdot 3 \cdot k = 3 \cdot (1640 - 49 \cdot p) \Leftrightarrow 134 \cdot k = 1640 - 49 \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{1640 - 134 \cdot k}{49}.$$

Cum $p \in \mathbb{N}^*$, obținem

$$1640 - 134 \cdot k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{1640}{134} = 12 \frac{32}{134},$$

deci $0 < k \leq 12, k \in \mathbb{N}$. Avem

$$\begin{aligned} p &= \frac{1640 - 134 \cdot k}{49} = \frac{33 \cdot 49 + 23 - (49 \cdot 2 + 36) \cdot k}{49} = 33 - 2k + \frac{23 - 36 \cdot k}{49} = \\ &= 33 - 2k + \frac{49 - 26 - 49 \cdot k + 13 \cdot k}{49} = 33 - 2k + \frac{49(1 - k) - 26 + 13 \cdot k}{49} = \\ &= 33 - 2k + 1 - k + \frac{13 \cdot k - 26}{49} = (34 - 3k + \frac{13(k-2)}{49}) \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

Pentru $0 < k \leq 12, k \in \mathbb{N}$. Rezultă

$$\frac{13(k-2)}{49} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{k-2}{49} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2,$$

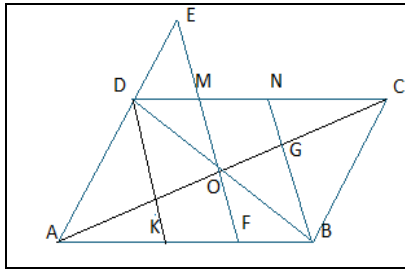
deoarece 13 și 49 sunt reciproc prime și $-1 \leq k - 2 \leq 12 - 2 = 10 < 49$. Astfel obținem $p = 28, q = 6$. Verificăm

$$28 \cdot 14,7 + 6 \cdot 13,4 = 411,6 + 80,4 = 492$$

Deci obținem $p = 28, q = 6$ soluție unică.

8.3. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este intersecția diagonalelor. Pe dreapta AD în exteriorul segmentului $[AD]$ se ia punctul E astfel încât $DE = \frac{1}{2}AD$. Fie $G \in AC$ astfel încât $EO \parallel BG$. Demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului BCD .

Soluție. 1) Avem $DO = OB$, deci $[OC]$ este mediană în $\triangle BCD$.



2) Notăm $EO \cap [DC] = \{M\}$, $BG \cap [DC] = \{N\}$, $EO \cap [AB] = \{F\}$. Cum $[MF] \parallel [NB]$ și $[MN] \parallel [FB]$, atunci $MNBF$ este paralelogram și deci $MN = FB$.
 3) $\triangle ODM \cong \triangle OBF$, deoarece $DO = OB$, $\sphericalangle DOM \cong \sphericalangle BOF$ - opuse la vârf, $\sphericalangle ODM \cong \sphericalangle OBF$ - alterne interne (ULU). Deci $DM = FB$.
 4) Trasăm $[DK] \parallel EO$ cu $K \in [AB]$.

Cum $[DK] \parallel [MF]$ și $[DM] \parallel [KF]$, atunci $MDKF$ este paralelogram și deci $DM = KF$. Astfel obținem $KF = DM = MN = FB$.

5) În $\triangle AEF$ avem $[DK] \parallel [EF]$, conform Teoremei lui Thales avem $\frac{AK}{KF} = \frac{AD}{DE} = \frac{2}{1} = 2$, deci $AK = 2KF$.

6) Cum $FB = KF$, obținem $AK = KB = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, deoarece AB, CD sunt laturi opuse în paralelogramul $ABCD$.

7) Dar $DN = DM + MN = KF + FB = KB = \frac{DC}{2}$. Astfel $[BN]$ este mediană în $\triangle BCD$ și G este centrul de greutate al triunghiului BCD , fiind punct de intersecție a două mediane.

8.4. Determinați toate numerele naturale n , astfel încât mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{4-x} \geq n\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x-1)(4-x) \geq 0\}$$

au exact un element comun.

Soluție. Mulțimea B constă din numerele întregi, care verifică inegalitatea $(2x-1)(4-x) \geq 0$.

Această inegalitate este adevărată doar în două cazuri: 1) $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases}$ și 2) $\begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x \leq 0. \end{cases}$

Rezolvăm sistemul 1) și obținem:

$$1) \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ 4-x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$\text{În cazul sistemului 2) obținem: } 2) \begin{cases} 2x-1 \leq 0, \\ 4-x \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}, \\ x \geq 4, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Deci $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Acum nu este necesar să găsim toate elementele mulțimii A . Rămâne doar să vedem pentru care numere naturale n mulțimea A are exact un element din mulțimea B .

Mai întâi vom stabili pentru care valori n elementele mulțimii B aparțin și mulțimii A .

Pentru $x = 1$ avem $\frac{2 \cdot 1 - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3} \geq n$. Deci, dacă $n = 0$, obținem că $1 \in A$.

Pentru $x = 2$ avem $\frac{2 \cdot 2 - 1}{4 - 2} = \frac{3}{2} \geq n$. Deci, dacă $n \in \{0, 1\}$, obținem că $2 \in A$.

Pentru $x = 3$ avem $\frac{2 \cdot 3 - 1}{4 - 3} = \frac{5}{1} \geq n$. Deci, dacă $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, obținem că $3 \in A$.

Numărul $x = 4$ nu poate fi element al mulțimii A , deoarece DVA al expresiei $\frac{2x-1}{4-x}$ este $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Prin urmare, doar pentru numerele naturale $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ mulțimile A și B au exact un element comun și anume $x = 3$.

8.5. Fie a, b și c trei numere reale. Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele $(a - b)^2, (a - c)^2, (b - c)^2$ nu depășește $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Soluție. Considerăm cazul, când cel puțin unul dintre numerele $a - b, a - c, b - c$ este egal cu zero. Presupunem, de exemplu, $a - b = 0$.

Atunci $(a - b)^2 = 0 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, deoarece suma patratelor întotdeauna este o mărime nenegativă.

Fie acum $a - b \neq 0, a - c \neq 0, b - c \neq 0$. Notăm cu m cel mai mic dintre numerele

$$|a - b|, |a - c|, |b - c|.$$

Fără a restrânge generalitatea, pentru fixarea ideilor, considerăm $a < b < c$. Atunci $|a - b| = b - a \geq m$ și $|b - c| = c - b \geq m$. De aici obținem

$$|a - c| = c - a = (c - b) + (b - a) \geq 2m.$$

Urmează

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq m^2 + 4m^2 + m^2 = 6m^2.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)) = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Cum $(a + b + c)^2 \geq 0$, atunci, conform ultimei inegalități, obținem

$$\begin{aligned} 6m^2 \leq (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \leq \\ &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \end{aligned}$$

sau

$$m^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Dar m^2 este cel mai mic dintre numerele $(a - b)^2, (a - c)^2, (b - c)^2$. Astfel cel mai mic dintre numerele $(a - b)^2, (a - c)^2, (b - c)^2$ nu depășește $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.