OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a IX–a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

9.1. Fie a, b și c trei numere reale, astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2$ are cel puțin un punct comun cu axa absciselor. Determinați valoarea minimă a sumei $S = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.	1 punct
2.	Reprezentarea $\Delta' = -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$.	1 punct
3.	Menționarea că $\Delta' \leq 0$ și concluzionarea că $\Delta' = 0$.	1 punct
4.	Obținerea $a = b = c$.	1 punct
5.	Obținerea $S = 3t^2 - 12t + 14$, unde $t = a = b = c$.	1 punct
6.	Obținerea inegalității $3t^2 - 12t + 14 \geq 2$.	1 punct
7.	Obținerea valorii a sumei, $S = 2$, cu mențiunea că ea se atinge pentru $t = 2$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.2. Fie AM – mediana unui triunghi ABC, iar N – un punct al laturii AC. Segmentul BN intersectează mediana AM în punctul P, astfel încât $[BP] \equiv [AC]$. Demonstrați că $[AN] \equiv [NP]$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construirea și completarea desenului cu paralela prin B la AC și cu dreapta AM.	1 punct
2.	Obținerea $\measuredangle DBM \equiv \measuredangle ACM$, $\measuredangle BDM \equiv \measuredangle CAM$.	1 punct
3.	Obținerea congruenței $\Delta ACM \equiv \Delta DBM$.	1 punct
4.	Demonstrarea că triunghiul BDP este isoscel.	1 punct
5.	Obținerea congruenței $\measuredangle BDP \equiv \measuredangle BPD$.	1 punct
6.	Demonstrarea că triunghiul APN este isoscel.	1 punct
7.	Obținerea $[AN] \equiv [NP]$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^2-x+2}+\ldots+\frac{2026}{x^2-x+2026}=2026$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Efectuarea substituției $x^2-x+1=t$ și obținerea $\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}+\ldots+\frac{2026}{t+2025}=2026$.	1 punct
2.	Reprezentarea expresiei $\frac{n+1}{t+n}=1+\frac{1-t}{t+n}$.	1 punct
3.	Obținerea ecuației $\frac{1-t}{t}+\frac{1-t}{t+1}+\ldots+\frac{1-t}{t+2025}=0$.	1 punct
4.	Obținerea ecuației $(1-t)\cdot\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{t+2025}\right]=0$.	1 punct
5.	Menționarea că $t>0$ și obținerea soluției unice $t=1$.	1 punct
6.	Obținerea ecuației $x^2-x=0$.	1 punct
7.	Obținerea $x\in\{0;1\}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.4. La examenul de matematică, 666 de elevi au comis în total 2000 de greșeli. Este posibil ca numărul elevilor care au comis 6 sau mai multe greșeli să fie mai mare decât numărul elevilor care au comis 3 sau mai puține greșeli? Argumentați.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea condiției $x+y+z=666$, unde x este numărul elevilor care au comis 3 sau mai puține greșeli, y este numărul elevilor care au comis 4 sau 5 greșeli, iar z este numărul elevilor care au comis 6 sau mai multe greșeli.	1 punct
2.	Prezentarea ipotezei problemei în forma $z=x+t,\ t\geq 1$.	1 punct
3.	Obținerea inegalității $M_1\geq 6z$, unde M_1 este numărul total al greșelilor elevilor care au comis 6 sau mai multe greșeli.	1 punct
4.	Obținerea inegalității $M_2>3y$, unde M_2 este numărul total al greșelilor elevilor care au comis 4 sau 5 greșeli.	1 punct
5.	Obținerea inegalității $M_3\geq 0$, unde M_3 este numărul total al greșelilor elevilor care au comis 3 sau mai puține greșeli.	1 punct
6.	Obținerea inegalității $1998+3t<2000$.	1 punct
7.	Demonstrarea contradicției dintre ultima inegalitate și condiția $t\geq 1$ și obținerea unui răspuns negativ la presupunerea inițială.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $ax + 3 = \lvert x + 4\rvert$ pentru toate valorile parametrului real a.		
Rezolvare cu barem de evaluare **(Metoda 1)**		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea inegalității $ax + 3 \geq 0$. (1)	1 punct
2.	Ridicarea la pătrat a ambelor părți ale ecuației inițiale și obținerea ecuației $(a^2 - 1) \cdot x^2 + (6a - 8) \cdot x - 7 = 0$. (2)	1 punct
3.	Determinarea soluțiilor ecuației (2) pentru $a = 1$ și verificarea condiției (1).	1 punct
4.	Determinarea soluțiilor ecuației (2) pentru $a = -1$ și verificarea condiției (1).	1 punct
5.	Determinarea soluțiilor ecuației (2) pentru $a \neq \pm 1$: $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{a-1} \\ x_2 = \dfrac{-7}{a+1} \end{array}\right.$	1 punct
6.	Determinarea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care x_1 și x_2 satisface condiția (1).	1 punct
7.	Scrierea corectă a răspunsului.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $ax + 3 = \lvert x + 4\rvert$ pentru toate valorile parametrului real a.		
Rezolvare cu barem de evaluare **(Metoda 2)**		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea totalității $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{-7}{a+1}, \\ x < -4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{a-1}, \\ x \geq -4 \end{cases} \end{array}\right.$ pentru $a \neq \pm 1$.	1 punct
2.	Cercetarea cazurilor $a = -1$ și $a = 1$, și obținerea concluziei cu privire la soluțiile ecuației.	1 punct
3.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} \frac{-7}{a+1} \geq -4, \\ \frac{1}{a-1} < -4 \end{cases}$ și obținerea concluziei cu privire la soluțiile ecuației.	1 punct
4.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} \frac{-7}{a+1} < -4, \\ \frac{1}{a-1} \geq -4 \end{cases}$ și obținerea concluziei cu privire la soluțiile ecuației.	1 punct
5.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} \frac{-7}{a+1} < -4, \\ \frac{1}{a-1} < -4 \end{cases}$ și obținerea concluziei cu privire la soluțiile ecuației.	1 punct
6.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} \frac{-7}{a+1} \geq -4, \\ \frac{1}{a-1} \geq -4 \end{cases}$ și obținerea concluziei cu privire la soluțiile ecuației.	1 punct
7.	Scrierea corectă a răspunsului.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte