ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Районный/муниципальный тур, 7 февраля 2026 г., IX класс
СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.***

9.1. Пусть a, b и c — три действительных числа такие, что график функции $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2$ имеет хотя бы одну общую точку с осью абсцисс. Определите минимальное значение суммы $S = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\Delta' = \frac{\Delta}{4} = -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.	1 балл
2.	Представление $\Delta' = -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$.	1 балл
3.	Указание, что $\Delta' \leq 0$ и формулирование вывода, что $\Delta' = 0$.	1 балл
4.	Получение $a = b = c$.	1 балл
5.	Получение $S = 3t^2 - 12t + 14$, где $t = a = b = c$.	1 балл
6.	Получение неравенства $3t^2 - 12t + 14 \geq 2$.	1 балл
7.	Получение значения суммы, $S = 2$, с указанием, что оно достигается при $t = 2$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.2. Пусть AM — медиана треугольника ABC, а N — точка на стороне AC. Отрезок BN пересекает медиану AM в точке P, так что $[BP] \equiv [AC]$. Докажите, что $[AN] \equiv [NP]$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Построение и дополнение чертежа с проведением через точку B прямой, параллельной AC, и прямой AM.	1 балл
2.	Получение $\measuredangle DBM \equiv \measuredangle ACM$, $\measuredangle BDM \equiv \measuredangle CAM$.	1 балл
3.	Получение конгруэнтности $\Delta ACM \equiv \Delta DBM$.	1 балл
4.	Доказательство того, что треугольник BDP является равнобедренным.	1 балл
5.	Получение конгруэнтности $\measuredangle BDP \equiv \measuredangle BPD$.	1 балл
6.	Доказательство того, что треугольник APN является равнобедренным.	1 балл
7.	Получение $[AN] \equiv [NP]$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^2-x+2}+...+\frac{2026}{x^2-x+2026}=2026$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Выполнение подстановки $x^2-x+1=t$ и получение $\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}+...+\frac{2026}{t+2025}=2026.$	1 балл
2.	Представление выражения $\frac{n+1}{t+n}=1+\frac{1-t}{t+n}$.	1 балл
3.	Получение уравнения $\frac{1-t}{t}+\frac{1-t}{t+1}+...+\frac{1-t}{t+2025}=0.$	1 балл
4.	Получение уравнения $(1-t)\cdot\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+...+\frac{1}{t+2025}\right]=0.$	1 балл
5.	Указание, что $t>0$ и получение единственного решения $t=1$.	1 балл
6.	Получение уравнения $x^2-x=0$.	1 балл
7.	Получение $x\in\{0;1\}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.4. На экзамене по математике, 666 учеников допустили в общей сложности 2000 ошибок. Возможно ли, чтобы число учеников, допустивших 6 или более ошибок, было больше, чем число учеников, допустивших 3 или меньше ошибок? Обоснуйте ответ.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение условия $x+y+z=666$, где x – число учеников, допустивших 3 или меньше ошибок, y - число учеников, допустивших 4 или 5 ошибок, z - число учеников, допустивших 6 или более ошибок.	1 балл
2.	Представление предположения задачи в виде $z=x+t,\ t\geq 1$.	1 балл
3.	Вывод неравенства $M_1\geq 6z$, где M_1 – общее число ошибок учеников, допустивших 6 или более ошибок.	1 балл
4.	Вывод неравенства $M_2>3y$, где M_2 – общее число ошибок учеников, допустивших 4 или 5 ошибок.	1 балл
5.	Вывод неравенства $M_3\geq 0$, где M_3 – общее число ошибок учеников, допустивших 3 или меньше ошибок.	1 балл
6.	Получение неравенства $1998+3t<2000$.	1 балл
7.	Демонстрация противоречия последнего неравенства с условием $t\geq 1$ и получение негативного ответа на предположение задачи.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $ax+3=\lvert x+4\rvert$, для всех значений действительного параметра a.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения **(Метод 1)**	Количество баллов
1.	Получение неравенства $ax+3\geq 0$. (1)	1 балл
2.	Возведение обеих частей исходного уравнения в квадрат и получение уравнения $(a^2-1)\cdot x^2+(6a-8)\cdot x-7=0$. (2)	1 балл
3.	Вычисление решений уравнения (2) при $a=1$ и проверка условия (1).	1 балл
4.	Вычисление решений уравнения (2) при $a=-1$ и проверка условия (1).	1 балл
5.	Вычисление решений уравнения (2) при $a\neq\pm 1$: $$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1}{a-1} \\ x_2=\dfrac{-7}{a+1}\end{array}\right.$$	1 балл
6.	Нахождение условий на параметр $a\in\mathbb{R}$, при которых решения x_1 и x_2 удовлетворяют условию (1)	1 балл
7.	Корректная запись ответа.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

9.5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $ax+3=\lvert x+4\rvert$, для всех значений действительного параметра a.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения **(Метод 2)**	Количество баллов
1.	Получение совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\frac{-7}{a+1}, \\ x<-4,\end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{a-1}, \\ x\geq -4\end{cases}\end{array}\right.$ для $a\neq\pm 1$.	1 балл
2.	Исследование случаев $a=-1$ и $a=1$, и формулирование вывода относительно решений уравнения.	1 балл
3.	Решение системы $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}\geq -4, \\ \frac{1}{a-1}<-4\end{cases}$ и получение вывода относительно решений уравнения.	1 балл
4.	Решение системы $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}<-4, \\ \frac{1}{a-1}\geq -4\end{cases}$ и получение вывода относительно решений уравнения.	1 балл
5.	Решение системы $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}<-4, \\ \frac{1}{a-1}<-4\end{cases}$ и получение вывода относительно решений уравнения.	1 балл
6.	Решение системы $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}\geq -4, \\ \frac{1}{a-1}\geq -4\end{cases}$ и получение вывода относительно решений уравнения.	1 балл
7.	Корректная запись ответа.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов