

A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 28 martie 2026, Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

12.1. Calculați:		
$\int_{-4}^4 \sqrt{-x^3 + 7x^2 - 11x + 5} dx.$		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $-x^3 + 7x^2 - 11x + 5 = (x - 1)^2(5 - x)$	2 puncte
2.	Obținerea $\int_{-4}^4 \sqrt{-x^3 + 7x^2 - 11x + 5} dx = \int_{-4}^4 x - 1 \sqrt{5 - x} dx =$	1 punct
3.	$= \int_{-4}^1 (1 - x) \sqrt{5 - x} dx + \int_1^4 (x - 1) \sqrt{5 - x} dx =$	1 punct
4.	$\left \begin{array}{l} t = \sqrt{5 - x} \\ x = 5 - t^2 \\ dx = -2t dt \\ x = -4 \Rightarrow t = 3 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 4 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right $	1 punct
5.	Obținerea $2 \int_2^3 (t^4 - 4t^2) dt + 2 \int_1^2 (4t^2 - t^4) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} \right) \Big _2^3 + \left(\frac{4t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big _1^2 = 40$	2 puncte
Punctaj total		7 puncte

12.2. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu baza ABC, punctul M aparține muchiei CV, astfel încât triunghiurile ABC și ABM sunt de arii egale cu $12\sqrt{3}$ cm², iar unghiul format de planele ABC și ABM este de 30°. Determinați volumul piramidei $VABC$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării <i>Metoda 1</i>	Punctaj acordat
1.	$AM = 4\sqrt{3}$ cm	1 punct
2.	$MK = 6$ cm, unde MK – înălțime în triunghiul ABM	1 punct
3.	$MC = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ cm, $VK^2 = VM^2 + 6VM(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 60 - 36\sqrt{3}$	2 puncte
4.	$VM = \frac{12\sqrt{3} - 8}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$	1 punct
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABS} = 3\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)$, unde $KS \perp CV$	1 punct
6.	Calcularea \mathcal{V}_{VABC}	1 punct

	Punctaj total	7 puncte
	Etape ale rezolvării <i>Metoda 2</i>	
1.	Determinarea lungimii laturii triunghiului din baza piramidei	1 punct
2.	Determinarea lungimii razei cercului circumscris triunghiului din baza piramidei	1 punct
3.	Obținerea măsurii unghiului format de muchia laterală cu planul bazei piramidei	2 puncte
4.	Determinarea lungimii înălțimii piramidei	2 puncte
5.	Calcularea \mathcal{V}_{VABC}	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.3. Fie $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 13 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n^2 + n + 1 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că Δ_{2026} este divizibil prin 4053.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1}$, unde $a_k = k(k+1)$, $k = 1, \dots, n$.	2 puncte
2.	Obținerea $\Delta_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_n} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_{n-1}} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2} + a_n a_{n-1} \dots a_2 \Delta_1$	2 puncte
3.	Obținerea $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_1} + 1 \right)$	2 puncte
4.	Obținerea $\Delta_{2026} = (2026!)^2 \cdot 4053$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.4. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x+n}} dx$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $\int_0^{\frac{\pi}{2}} n \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x+n}} dx \leq \frac{\pi}{2}$	2 puncte
2.	Demonstrare că $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	1 punct
3.	Obținerea $n \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x+n}} \geq n \sqrt{\frac{2x}{\pi(n+1)}}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	1 punct

4.	Obținerea $I_n \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$	1 punct
5.	Calcularea $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$	1 punct
6.	Concluzia	1 punct
	Punctaj total	7 puncte