OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 1 martie 2026, Clasa a XII–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

12.5. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub cu muchia de 1 cm, în care punctul M este mijlocul muchiei DD_1. Determinați măsura unghiului format de dreptele BM și A_1C.

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construirea cubului $PABRP_1A_1B_1R_1$, încât $P_1B \parallel A_1C$ și identificarea unghiului $\alpha = P_1BM$ în calitate de unghi congruent cu unghiul format de dreptele BM și A_1C.	2 puncte
2.	$BM = \frac{3}{2}$ cm	1 punct
3.	$BP_1 = \sqrt{3}$ cm	1 punct
4.	Obținerea $\frac{17}{4} = 3 + \frac{9}{4} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cos \alpha$	2 puncte
5.	Obținerea $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.6. Arătați că pentru orice număr complex z cu modulul egal cu 1 are loc inegalitatea $\sqrt{2}\,|1 - z| + \frac{1}{4}|1 - z^4| \geq |1 - z^2|$. Determinați toate valorile lui z, pentru care are loc egalitatea.

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Considerarea $z = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in (-\pi;\ \pi]$ și obținerea $z^2 = \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$ și $z^4 = \cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi)$.	1 punct
2.	Obținerea $\|1 - z\| = 2\left\|\sin\frac{\varphi}{2}\right\|$	1 punct
3.	Obținerea $2\sqrt{2}\left\|\sin\frac{\varphi}{2}\right\| + \frac{1}{2}\|\sin(2\varphi)\| \geq 2\|\sin\varphi\|$	1 punct
4.	$\left\|\sin\frac{\varphi}{2}\right\|\left(\sqrt{2} + \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left\|\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right\| \cdot \left\|\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 1\right\| - 2\cos\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$	1 punct
5.	Obținerea pentru $\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 1 \geq 0$ a inegalității adevărate	1 punct

	$\left\|\sin\frac{\varphi}{2}\right\|\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{2}\right)\geq 0$	
6.	Obținerea pentru $\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}-1<0$ a inegalității adevărate $$\left\|\sin\frac{\varphi}{2}\right\|\left(1-\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sqrt{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{2}\right)\geq 0$$	1 punct
7.	Obținerea valorilor lui $z=1, z=\pm i$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.7. Determinați toate funcțiile continue $f\colon(0;1)\to\mathbb{R}$ pentru care

$$f(x)F(1-x)=\ln(x-x^2),$$

unde $F\colon(0;1)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, astfel încât $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obținerea $f(x)F(1-x)-f(1-x)F(x)=0$	1 punct
2.	Obținerea $F(x)F(1-x)=1$	1 punct
3.	Obținerea $\frac{f(x)}{F(x)}=\ln(x-x^2)$	1 punct
4.	$$\ln F(x)=\int\ln(x-x^2)\,dx=\left\|\begin{matrix} u=\ln(x-x^2) & dv=dx \\ du=\dfrac{(1-2x)dx}{x-x^2} & v=x\end{matrix}\right\|$$ $$=x\ \ln(x-x^2)-\int\frac{1-2x}{1-x}dx$$ $$=x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+C_1.$$	2 puncte
5.	Obținerea $F(x)=e^{x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+1}$	1 punct
6.	Obținerea $f(x)=F(x)\ln(x-x^2)=\ln(x-x^2)\,e^{x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+1}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.8. Fie $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n=I_1+I_2+\cdots+I_n$, este convergent.

Rezolvare cu barem de evaluare

	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Argumentarea că șirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător	1 punct

2.	Obținerea $\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} \leq \frac{1}{n}x^{\frac{n+1}{2}}$	2 puncte
3.	Obținerea $I_n \leq \frac{2}{n(n+3)}$	1 punct
4.	Obținerea $S_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right)$	1 punct
5.	$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \leq \frac{11}{9}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	1 punct
6.	Aplicarea teoremei Weierstrass și concluzia	1 punct
	Punctaj total	7 puncte