69-Я РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 28 февраля 2026 г., XII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

12.1. Вычислите:

$$\int_{-4}^{4}\sqrt{-x^3+7x^2-11x+5}\,dx.$$

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $-x^3+7x^2-11x+5=(x-1)^2(5-x)$	2 балла
2.	Получение $\int_{-4}^{4}\sqrt{-x^3+7x^2-11x+5}\,dx=\int_{-4}^{4}\lvert x-1\rvert\sqrt{5-x}\,dx=$	1 балл
3.	$=\int_{-4}^{1}(1-x)\sqrt{5-x}\,dx+\int_{-4}^{1}(x-1)\sqrt{5-x}\,dx=$	1 балл
4.	$\left\lvert\begin{matrix} t=\sqrt{5-x} \\ x=5-t^2 \\ dx=-2tdt \\ x=-4\Rightarrow t=3 \\ x=1\Rightarrow t=2 \\ x=4\Rightarrow t=1 \end{matrix}\right\rvert$	1 балл
5.	Получение $2\int_{2}^{3}(t^4-4t^2)\,dt+2\int_{1}^{2}(4t^2-t^4\,)\,dx=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right)\Big\rvert_2^3+\left(\frac{4t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big\rvert_1^2$ $=40$	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

12.2. В правильной треугольной пирамиде $VABC$ с основанием ABC, точка M принадлежит ребру CV так, что треугольники ABC и ABM имеют одинаковую площадь равную $12\sqrt{3}$ см^2, а мера угла образованного плоскостями ABC а ABM равна $30°$. Найдите объём пирамиды $VABC$.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения *Метод 1*	Количество баллов
1.	$AM=4\sqrt{3}$ см	1 балл
2.	$MK=6$ см, где $MK-$ высота в треугольнике ABM	1 балл
3.	$MC=3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ см, $VK^2=VM^2+6VM\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+60-36\sqrt{3}$	2 балла
4.	$VM=\dfrac{12\sqrt{3}-8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$	1 балл
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABS}=3\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$, где $KS\perp CV$	1 балл

6.	Вычисление $\mathcal{V}_{VABC}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

	Этапы решения *Метод 2*	Количество баллов
1.	Нахождение длины стороны треугольника из основания	1 punct
2.	Нахождение длины радиуса окружности описанного около треугольника из основания	1 punct
3.	Нахождение меры угла образованного боковым ребром с основанием пирамиды	2 puncte
4.	Нахождение длины высоты пирамиды	2 puncte
5.	Вычисление $\mathcal{V}_{VABC}$	1 punct
	Общее количество баллов	7 баллов

12.3. Пусть $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 13 & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n^2+n+1 \end{vmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Покажите, что Δ_{2026} делится без остатка на 4053.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
2.	Получение $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1}$, где $a_k = k(k+1)$, $k = 1, \dots, n$.	2 балла
3.	Получение $\Delta_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_n} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2} + a_n a_{n-1} \dots a_2 \Delta_1$	2 балла
4.	Получение $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \cdots \frac{1}{a_1} + 1 \right)$	2 балла
5.	Получение $\Delta_{2026} = (2026!)^2 \cdot 4053$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.4. Пусть $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x + n}}\, dx$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Вычислите $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x + n}}\, dx \leq \frac{\pi}{2}$	2 балла
2.	Доказательство, что $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	1 балл

3.	Получение $\sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} \geq \sqrt[n]{\frac{2x}{\pi(n+1)}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	1 балл
4.	Получение $I_n \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$	1 балл
5.	Вычисление $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$	1 балл
6.	Вывод	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов