РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 1 марта 2026 г., XII класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

12.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 см, в котором точка M есть середина ребра DD_1. Найдите меру угла, образованного прямыми BM и A_1C.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Построение куба $PABRP_1A_1B_1R_1$ так, что $P_1B \parallel A_1C$ и идентифицирование угла $\alpha = P_1BM$ как угол конгруэнтный углу между прямыми BM и A_1C.	2 балла
2.	$BM = \frac{3}{2}$ см	1 балл
3.	$BP_1 = \sqrt{3}$ см	1 балл
4.	Получение $\frac{17}{4} = 3 + \frac{9}{4} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cos\alpha$	2 балла
5.	Получение $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.6. a) Покажите, что для любого комплексного числа z с модулем 1 справедливо неравенство

$$\sqrt{2}\,|1 - z| + \frac{1}{4}|1 - z^4| \geq |1 - z^2|.$$

b) Найдите все значения z, при которых в неравенстве из пункта a) достигается знак равенства.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Запись $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \varphi \in (-\pi;\ \pi]$ и получение $z^2 = \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$ și $z^4 = \cos(4\varphi) + i\sin(4\varphi)$.	1 балл
2.	Получение $\lvert 1 - z\rvert = 2\left\lvert\sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert$	1 балл
3.	Получение $2\sqrt{2}\left\lvert\sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert + \frac{1}{2}\lvert\sin(2\varphi)\rvert \geq 2\lvert\sin\varphi\rvert$	1 балл
4.	Получение $\left\lvert\sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert\left(\sqrt{2} + \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left\lvert\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 1\right\rvert \cdot \left\lvert\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 1\right\rvert - 2\cos\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$	1 балл
5.	Получение, при $\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} - 1 \geq 0$ верного неравенства	1 балл

	$\left\lvert\sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{2}\right)\geq 0$	
6.	Получение, при $\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}-1<0$ верного неравенства $$\left\lvert\sin\frac{\varphi}{2}\right\rvert\left(1-\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sqrt{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{2}\right)\geq 0$$	1 балл
7.	Получение значений $z=1, z=\pm i$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.7. Найдите все непрерывные функции $f\colon(0;1)\to\mathbb{R}$ при которых

$$f(x)F(1-x)=\ln(x-x^2),$$

где $F\colon(0;1)\to\mathbb{R}$ есть первообразная функции f так, что $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $f(x)F(1-x)-f(1-x)F(x)=0$	1 балл
2.	Получение $F(x)F(1-x)=1$	1 балл
3.	Получение $\frac{f(x)}{F(x)}=\ln(x-x^2)$	1 балл
4.	$$\ln F(x)=\int\ln(x-x^2)\,dx=\begin{vmatrix} u=\ln(x-x^2) & dv=dx \\ du=\dfrac{(1-2x)dx}{x-x^2} & v=x \end{vmatrix}$$ $$=x\ \ln(x-x^2)-\int\frac{1-2x}{1-x}dx$$ $$=x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+C_1.$$	2 балла
5.	Получение $F(x)=e^{x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+1}$	1 балл
6.	Получение $f(x)=F(x)\ln(x-x^2)=\ln(x-x^2)\,e^{x\ \ln(x-x^2)-2x-\ln(1-x)+1}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.8. Пусть $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Покажите, что последовательность $(S_n)_{n\geq 1}$, где $S_n=I_1+I_2+\cdots+I_n$, сходится.

Решение со схемой распределения баллов

	Этапы решения	Количество баллов
1.	Обоснование, что последовательность $(S_n)_{n\geq 1}$ монотонно возрастает	1 балл
2.	Получение $\frac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}\leq\frac{1}{n}x^{\frac{n+1}{2}}$	2 балла

3.	Получение $I_n \leq \frac{2}{n(n+3)}$	1 балл
4.	Получение $S_n = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right)$	1 балл
5.	$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \leq \frac{11}{9}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$	1 балл
6.	Применение теоремы Вейерштрасса и вывод	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов