

A 68-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Prima zi, 28 februarie 2026, Clasa a XII-a

Soluții

12.1. Calculați:

$$\int_{-4}^4 \sqrt{-x^3 + 7x^2 - 11x + 5} dx.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 \sqrt{-x^3 + 7x^2 - 11x + 5} dx &= \int_{-4}^4 \sqrt{(x-1)^2(5-x)} dx = \int_{-4}^4 |x-1|\sqrt{5-x} dx \\ &= \int_{-4}^1 (1-x)\sqrt{5-x} dx + \int_1^4 (x-1)\sqrt{5-x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{5-x} \\ x = 5-t^2 \\ dx = -2tdt \\ x = -4 \Rightarrow t = 3 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 4 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = 2 \int_2^3 (t^4 - 4t^2) dt + 2 \int_1^2 (4t^2 - t^4) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} \right) \Big|_2^3 + 2 \left(\frac{4t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_1^2 = 40. \end{aligned}$$

12.2. În piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu baza ABC , punctul M aparține muchiei CV , astfel încât triunghiurile ABC și ABM sunt de arii egale cu $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar unghiul format de planele ABC și ABM este de 30° . Determinați volumul piramidei $VABC$.

Soluție. Metoda 1. Fie CK – înălțime în triunghiul ABC . Atunci MK – înălțime în triunghiul ABM și $m(\angle MKC) = 30^\circ$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta ABM}$ implică $MK = KC$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ implică $BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.

Atunci $AM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, iar

$MK = AM \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)}$.

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul CMK , obținem

$$MC^2 = 72 - 36\sqrt{3}.$$

Atunci $MC = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} \text{ cm}$.

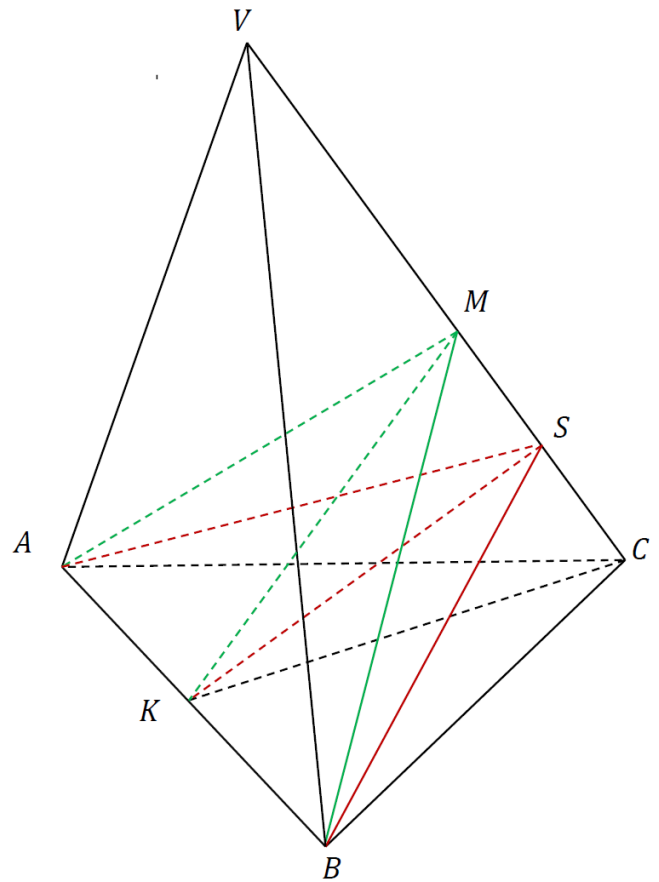
$$VA = CV = VM + MC.$$

În triunghiul VAK :

$$\begin{aligned} VK^2 &= VA^2 - AK^2 = (VM + MC)^2 - AK^2 \\ &= VM^2 + 6VM(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 60 - 36\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Întrucât triunghiul CMK - isoscel, $m(\angle KMC) = 75^\circ$. Atunci $m(\angle VMK) = 105^\circ$.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul VKM și obținem



$$VK^2 = MK^2 + VM^2 - 2MK \cdot VM \cdot \cos 105^\circ = 36 + VM^2 - 12VM \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= VM^2 + 3VM(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 36.$$

Egalăm cele două expresii obținute pentru VK^2 și obținem

$$VM^2 + 6VM(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 60 - 36\sqrt{3} = VM^2 - 3VM(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 36, \text{ ceea ce implică}$$

$$VM = \frac{12\sqrt{3}-8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

$$\text{Atunci } CV = VM + MC = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \text{ (cm).}$$

Fie $KS \perp CV$. Atunci $CV \perp (ABS)$, iar $\mathcal{V}_{VABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\Delta ABS} \cdot CV$.

În triunghiul isoscel CMK , KS este înălțime, deci și mediană. Atunci

$$KS^2 = CK^2 - CS^2 = 18 + 9\sqrt{3}, \text{ ceea ce implică } KS = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} \text{ cm.}$$

Calculăm $\mathcal{A}_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} AB \cdot KS = 3\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) \text{ (cm}^2\text{)}$. Atunci $\mathcal{V}_{VABC} = 16(2\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^3$.

Metoda 2. Fie CK – înălțime în triunghiul ABC . Atunci MK – înălțime în triunghiul ABM și $m(\angle MKC) = 30^\circ$. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta ABM}$ implică $MK = KC$. $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ implică $BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ și $MK = KC$. Atunci $m(\angle MCK) = 75^\circ$. Fie VO – înălțimea piramidei. Atunci $OC = 4 \text{ cm}$, $VO = OC \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$. Determinăm $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Atunci $VO = 4(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}$, iar $\mathcal{V}_{VABC} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\Delta ABC} \cdot VO = 16(2\sqrt{3} + 3) \text{ cm}^3$.

$$12.3. \text{ Fie } \Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 13 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n^2 + n + 1 \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \text{ Arătați că } \Delta_{2026} \text{ este divizibil prin } 4053.$$

Soluție. Notăm $a_k = k(k + 1)$, $k = 1, \dots, n$.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n^2 + n + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_2 + 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & a_n + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} + a_n \begin{vmatrix} a_1 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$-a_1(-1)^{n+1}(-1)^n a_2 a_3 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n \Delta_{n-1}.$$

Atunci $\Delta_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-2} + a_{n-1} \Delta_{n-2}$, iar $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n + a_n a_{n-1} \Delta_{n-2}$.

Înlocuind expresia lui Δ_{n-2} , obținem

$$\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n + a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_{n-1} a_n + a_n a_{n-1} a_{n-2} \Delta_{n-3} = \dots$$

$$= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_n} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_{n-1}} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2} + a_n a_{n-1} \dots a_2 \Delta_1$$

$$= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_n} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_{n-1}} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_2} + a_n a_{n-1} \dots a_2 (1 + a_1)$$

$$= a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_1} + 1 \right).$$

Pentru $a_k = k(k+1)$, $k = 1, \dots, n$, obținem

$$\begin{aligned} \Delta_n &= n!(n+1)! \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ &= n!(n+1)! \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = n!(n+1)! \left(2 - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= (n!)^2 (2n+1). \end{aligned}$$

Atunci $\Delta_{2026} = (2026!)^2 \cdot 4053$.

12.4. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} dx$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Soluție. Întrucât $0 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ obținem $\frac{\sin x}{\sin x+n} \leq 1$ și respectiv $\sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} \leq 1$. Atunci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx, \text{ ceea ce implică } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} dx \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Observăm că $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Într-adevăr: pe segmentul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ funcția $f(x) = \sin x$ este concavă. Conform definiției funcției concave toate valorile funcției sunt situate deasupra coardei care trece prin punctele $(0; 0)$ și $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, adică $y = \frac{2}{\pi}x$.

Atunci $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]: \frac{\sin x}{\sin x+n} \geq \frac{2x}{\pi(n+1)}$, ceea ce implică $\sqrt[n]{\frac{\sin x}{\sin x+n}} \geq \sqrt[n]{\frac{2x}{\pi(n+1)}}$.

$$I_n \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\frac{2x}{\pi(n+1)}} dx = \left(\frac{2}{\pi(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Întrucât

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Conform teoremei „cleștelui” din (1) și (2) concluzionăm că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.