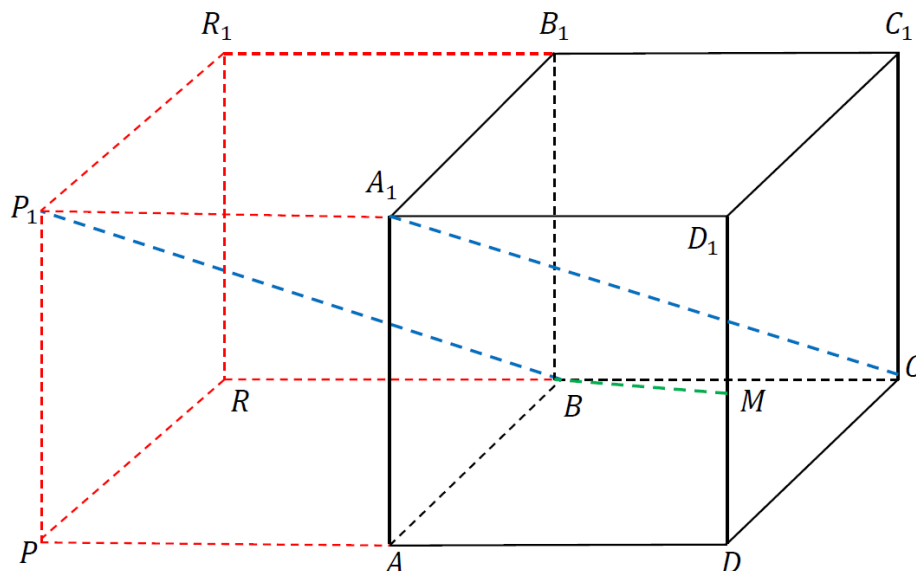


A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

Ziua a doua, 1 martie 2026, Clasa a XII-a

Soluții

12.5. Fie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ un cub cu muchia de 1 cm, în care punctul M este mijlocul muchiei DD_1 . Determinați măsura unghiului format de dreptele BM și A_1C .



Soluție.

Construim cubul $PABRP_1A_1B_1R_1$, încât $P_1B \parallel A_1C$. Atunci unghiul format de dreptele BM și A_1C este congruent cu unghiul $P_1BM = \alpha$.

Calculăm $BM^2 = AB^2 + AD^2 + MD^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, $P_1M^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $BP_1 = \sqrt{3}$ cm.

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul P_1BM și obținem

$P_1M^2 = P_1B^2 + BM^2 - 2P_1B \cdot BM \cdot \cos \alpha$, ceea ce implică $\frac{17}{4} = 3 + \frac{9}{4} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} \cos \alpha$ și în consecință $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ și $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{9}$.

12.6. Arătați că pentru orice număr complex z cu modulul egal cu 1 are loc inegalitatea

$\sqrt{2} |1 - z| + \frac{1}{4} |1 - z^4| \geq |1 - z^2|$. Determinați toate valorile lui z , pentru care are loc egalitatea.

Soluție. Fie $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\varphi \in (-\pi; \pi]$.

Atunci $z^2 = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$ și $z^4 = \cos(4\varphi) + i \sin(4\varphi)$.

$$1 - z = 1 - \cos \varphi - i \sin \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right),$$

ceea ce implică

$$|1 - z| = 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|, |1 - z^2| = 2|\sin \varphi|, |1 - z^4| = 2|\sin(2\varphi)|.$$

Atunci inegalitatea

$$2\sqrt{2}|1 - z| + \frac{1}{4}|1 - z^4| \geq |1 - z^2|$$

este echivalentă cu $2\sqrt{2} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| + \frac{1}{2} |\sin(2\varphi)| \geq 2|\sin \varphi| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| + |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \geq 4 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left| 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right| \geq 4 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \left(\sqrt{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left| \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 1 \right| \cdot \left| \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 1 \right| - 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \geq 0.$$

Pentru $\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 1 \geq 0$ inegalitatea este echivalentă cu

$$\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \left(\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2} \right) \geq 0 - \text{inegalitate adevărată.}$$

Pentru $\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} - 1 < 0$ inegalitatea este echivalentă cu

$$\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \left(1 - \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \left(\sqrt{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2} \right) \geq 0 - \text{inegalitate adevărată.}$$

Pentru $(-\pi; \pi]$, semnul „=” în inegalitatea obținută la punctul a) are loc dacă și numai dacă

$$\begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \\ \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Pentru valorile obținute a lui φ , obținem valorile lui $z = 1, z = \pm i$.

12.7. Determinați toate funcțiile continue $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(x)F(1-x) = \ln(x-x^2),$$

unde $F: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , astfel încât $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Soluție. Pentru $t = 1 - x$, obținem $f(1-t)F(t) = \ln(t(1-t))$.

Scădem parte cu parte cele două cele două egalități și obținem

$$\begin{aligned} f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) &= 0 \Leftrightarrow F'(x)F(1-x) + (F(1-x))'F(x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (F(x)F(1-x))' = 0 \Leftrightarrow F(x)F(1-x) = C. \end{aligned}$$

Din condiția $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ obținem $C = 1$ și în consecință relația $F(x)F(1-x) = 1$.

Observăm că, deoarece pentru $x \in (0; 1)$: $\ln(x-x^2) < 0$, relația $f(x)F(1-x) = \ln(x-x^2)$

și condiția $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ implică $f(x) < 0$ și $F(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$.

Înlocuim $F(1-x) = \frac{1}{F(x)}$ în relația $f(x)F(1-x) = \ln(x-x^2)$ și obținem

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \ln(x - x^2) \Leftrightarrow (\ln F(x))' = \ln(x - x^2).$$

Atunci

$$\begin{aligned} \ln F(x) &= \int \ln(x - x^2) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x - x^2) \quad dv = dx \\ du = \frac{(1 - 2x)dx}{x - x^2} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln(x - x^2) - \int \frac{1 - 2x}{1 - x} dx \\ &= x \ln(x - x^2) - \int \left(2 - \frac{1}{1 - x} \right) dx = x \ln(x - x^2) - 2x - \ln(1 - x) + C_1. \end{aligned}$$

Înlocuim în expresia obținută $x = \frac{1}{2}$ și obținem $C_1 = 1$.

Atunci

$$F(x) = e^{x \ln(x - x^2) - 2x - \ln(1 - x) + 1},$$

și în consecință

$$f(x) = F(x) \ln(x - x^2) = \ln(x - x^2) e^{x \ln(x - x^2) - 2x - \ln(1 - x) + 1}.$$

12.8. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(S_n)_{n \geq 1}$, unde $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, este convergent.

Soluție. Întrucât $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, concluzionăm că șirul $(S_n)_{n \geq 1}$ este monoton crescător.

Aplicăm inegalitatea mediilor (aritmetică-geometrică) și obținem

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} \leq \frac{x^n}{n \sqrt[n]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot \dots \cdot x^{n-1}}} = \frac{x^n}{n \sqrt[n]{x^{1+2+\dots+n-1}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{n+1}{2}}.$$

Atunci

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}} dx = \frac{2}{n(n+3)} x^{\frac{n+3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{n(n+3)}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

Și în consecință

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{1 \cdot 4} + \frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 6} + \frac{2}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(n-2)(n+1)} + \frac{2}{(n-1)(n+2)} + \frac{2}{n(n+3)} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \leq \frac{11}{9}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Astfel am obținut că șirul $(S_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, iar conform teoremei Weierstrass este și convergent.