A 69-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 1 martie 2026, Clasa a XII–a

12.5. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub cu muchia de 1 cm, în care punctul M este mijlocul muchiei DD_1. Determinați măsura unghiului format de dreptele BM și A_1C.

12.6. Arătați că pentru orice număr complex z cu modulul egal cu 1 are loc inegalitatea $\sqrt{2}\,|1-z|+\frac{1}{4}|1-z^4|\geq|1-z^2|$. Determinați toate valorile lui z, pentru care are loc egalitatea.

12.7. Determinați toate funcțiile continue $f:(0;1)\to\mathbb{R}$ pentru care

$$f(x)F(1-x)=\ln(x-x^2),$$

unde $F:(0;1)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, astfel încât $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

12.8. Fie $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(S_n)_{n\geq1}$, unde $S_n=I_1+I_2+\cdots+I_n$, este convergent.

Timp de lucru: 240 de minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**

A 68-A OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Ziua a doua, 1 martie 2025, Clasa a XII–a

12.5. Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un cub cu muchia de 1 cm, în care punctul M este mijlocul muchiei DD_1. Determinați măsura unghiului format de dreptele BM și A_1C.

12.6. Arătați că pentru orice număr complex z cu modulul egal cu 1 are loc inegalitatea $\sqrt{2}\,|1-z|+\frac{1}{4}|1-z^4|\geq|1-z^2|$. Determinați toate valorile lui z, pentru care are loc egalitatea.

12.7. Determinați toate funcțiile continue $f:(0;1)\to\mathbb{R}$ pentru care

$$f(x)F(1-x)=\ln(x-x^2),$$

unde $F:(0;1)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, astfel încât $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

12.8. Fie $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(S_n)_{n\geq1}$, unde $S_n=I_1+I_2+\cdots+I_n$, este convergent.

Timp de lucru: 240 de minute.

Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**